

אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 6

27 בינואר 2019

1. בדקו האם הפונקציות הבאות גזירות, ואם כן מצאו את הנגזרת:

$$f(x + yi) = \cos x \cos y + \sin x \sin yi \quad (\text{א})$$

$$f(x + yi) = xy + \frac{y^2 - x^2}{2}i \quad (\text{ב})$$

פתרון:

א. נבדוק קושי רימן: $U(x, y) = \cos x \cos y, V(x, y) = \sin x \sin y$, ולכן:

$$U_x = -\sin x \cos y, U_y = -\cos x \sin y$$

$$V_x = \cos x \sin y, V_y = \sin x \cos y$$

וכיון ש $U_x \neq V_y$ נקבל שהפונקציה לא גזירה.

ב. $U(x, y) = xy, V(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2} = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$, ולכן:

$$U_x = y, U_y = x$$

$$V_x = -x, V_y = y$$

תנאי קושי רימן מתקיים: $U_x = V_y, U_y = -V_x$, ולכן הפונקציה גזירה ונגזרתה היא:

$$f'(x + yi) = U_x + V_x i = y - xi$$

2. תהי $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה גזירה. כידוע, יש $U, V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש-

$$f(x + yi) = U(x, y) + V(x, y)i$$

הוכיחו שאם V פונקציה קבועה אזי f קבועה גם (במילים: אם החלק המדומה של f קבוע, אז f קבועה).

פתרון:

f גזירה, ולכן מתקיימות משוואות קושי רימן. כלומר מתקיים: $U_x = V_y, U_y = -V_x$.
 כעת, כיון שנתון לנו ש- V פונקציה קבועה (נניח $V = c_1$) לכן נגזרתה אפס, ולכן:
 $U_x = V_y = 0, U_y = -V_x = 0$, ולכן גם U קבועה (נניח $U = c_2$). בסה"כ נקבל:
 $f = U + iV = c_2 + ic_1$ פונקציה קבועה.

3. חשבו את המספרים הבאים (התוצאה צריכה להיות מספר מרוכב בהצגה קרטזית או פולרית):

(א) e^{1+2i}

(ב) $e^{5cis\pi}$

(ג) $\sin(1+i)$

(ד) $\cos(2cis\frac{\pi}{6})$

(ה) $\ln(3-4i)$

(ו) $ecis\frac{\pi}{4}^{1-i}$

פתרון:

א. $e^{1+2i} = e^1 cis 2 = ecis 2$

ב. $e^{5cis\pi} = e^{-5}$

ג. $\sin(1+i) = \frac{e^{i(1+i)} - e^{-i(1+i)}}{2i} = \frac{e^{-1+i} - e^{1-i}}{2i} = \frac{e^{-1}cis1 - e^1cis(-1)}{2i} = \frac{e^{-1}(\cos 1 + i\sin 1) - e(\cos(-1) + i\sin(-1))}{2i}$

כעת נקבץ ממשיים ומדומים, ניזכר ש- $\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$ וניזכר ש- $\frac{1}{i} = -i$ לכן נקבל:
 $\sin 1 \frac{e^{-1}+e}{2} + \cos 1 \frac{e^{-1}-e}{2} i$

ד. $\cos(2cis\frac{\pi}{6}) = \frac{e^{i \cdot 2cis\frac{\pi}{6}} + e^{-i \cdot 2cis\frac{\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{2cis\frac{4\pi}{6}} + e^{2cis\frac{10\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{-1+\sqrt{3}i} + e^{1-\sqrt{3}i}}{2} = \frac{e^{-1}cis\sqrt{3} + ecis(-\sqrt{3})}{2}$
 נדלג ישר לקיבוץ איברים דומים ולצורה הקרטזית:
 $\frac{\cos\sqrt{3}(e+e^{-1}) + i\sin\sqrt{3}(e^{-1}-e)}{2} = \cos\sqrt{3}\frac{e+e^{-1}}{2} + \sin\sqrt{3}\frac{e^{-1}-e}{2} i$

ה. $\ln(3-4i) = \ln(5cis - 0.927) = \ln 5 + -0.927i$

ו. $ecis\frac{\pi}{4}^{1-i} = e^{(1-i)\ln(ecis\frac{\pi}{4})} = e^{(1-i)(\ln e + \frac{\pi}{4}i)} = e^{1+\frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{4}-1)i} = e^{1+\frac{\pi}{4}} cis(\frac{\pi}{4}-1)$

4. הוכיחו (היעזרו בתרגילים הדומים שעשינו בכיתה):

(א) $\sin(\bar{z}) = \overline{\sin(z)}$

(ב) $\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$

(ג) אם $z \neq 0$ ואיננו ממשי שלילי אז: $\overline{z^w} = \overline{z}^{\overline{w}}$. הדרכה: תשאירו את w , z כמות שהם ואל תרשמו אותם בצורה קרטזית או פולרית. תלכו לפי הגדרת החזקה המרוכבת.

פתרון:

א. $\sin(\overline{z}) = \frac{e^{i\overline{z}} - e^{-i\overline{z}}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i}$. כעת, כיון שראינו בתרגול ש $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ נוכל להמשיך: $\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i}$. כדי שגם במכנה תהיה הצמדה נרשום:

$$\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{-2i} = \overline{\left(\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{-2i}\right)} = \overline{\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)} = \overline{\sin(z)}$$

ב. באופן דומה: $\cos(\overline{z}) = \frac{e^{i\overline{z}} + e^{-i\overline{z}}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \overline{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = \overline{\cos(z)}$

ג. לפי הגדרת החזקה המרוכבת: $z^w = e^{w \ln z}$. לכן נקבל: $\overline{z^w} = e^{\overline{w \ln z}}$. ראינו בתרגול שלכל מרוכב z שאינו ממשי שלילי מתקיים $\overline{\ln z} = \ln \overline{z}$, לכן נקבל אצלנו: $e^{\overline{w \ln z}} = e^{\overline{w} \cdot \overline{\ln z}} = e^{\overline{w} \cdot \ln \overline{z}} = \overline{e^{w \ln z}} = \overline{z^w}$.

בהצלחה!