

בס"ד  
שאלון בחינה בקורס: משוואות דיפרנציאליות רגילות  
מספר הקורס: 83-115-01  
מרצה: דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'  
סמסטר ב', מועד ב': ז אלול התשע"ד (2.09.2014)  
משך הבחינה: שלוש שעות

חומר עזר: 3 דפים חד-צדדיים של A4, מחשבון רגיל (אין להשתמש במחשבון גרפי)

ניקוד: במבחן אפשר לצבור 115 נקודות.

יש לפרט שלבי החישוב נא לכתוב באופן ברור ומסודר. שאלה מבולגנת ולא מסודרת לא תוכל לזכות במלוא הנקודות.

## בהצלחה!

שאלה 1. (16 נקודות)

- א. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה  $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$  בדרך כלשהי, לפי בחירתכם. חפשו פתרונות המשוואה המקיימים את תנאי ההתחלה  $y(1) = 0$ ;
- ב. הציעו עוד שיטה לפתרון של המשוואה מהסעיף הקודם והסבירו מדוע השיטה מתאימה (אין צורך לפתור את המשוואה בדרך השנייה).

שאלה 2. (24 נקודות)

- א. נתון כי למשוואה  $xy'' + (x-1)y' - y = 0$  יש פתרון שהוא פונקציה מעריכית. מצאו אותו;
- ב. מצאו את הפתרון הכללי למשוואה זו;
- ג. פתרו את המשוואה  $xy'' + (x-1)y' - y = x^2 e^{3x}$ .

שאלה 3. (16 נקודות)

- א. תהי משוואה  $y'' + 4y' + 4y + 9\epsilon y = 0$ , כאשר  $\epsilon$  הוא פרמטר. פתרו את המשוואה (התבוננו בכל הפתרונות האפשריים);
- ב. רשמו את צורת פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית הבאה (אין צורך לחשב את המקדמים):  $y''' - 2y'' + y' = 2t^3 + 3e^t$ .

שאלה 4 . (32 נקודות)

$$\cdot \bar{x}'(t) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{2}{t} e^{-3t} \\ \frac{1}{t} e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

- א. פתרו את המערכת ההומוגנית המתאימה;  
 ב. מצאו פתרון כללי של המערכת האי-הומוגנית;  
 ג. מצאו את הפתרון הפרטי אם נתון  $\bar{x}(\ln 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  
 ד. (אין קשר לסעיפים קודמים) פתרו את המערכת

$$\bar{x}'(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \bar{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{-at} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

בעזרת התמרת לפלס כאשר  $\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $-a$  פרמטר.

שאלה 5 . (16 נקודות)

תהי - התמרת לפלס של  $f(t)$  .

- א. הוכיחו בעזרת טבלת ההתמרה או בכל דרך אחרת כי  
 $L\{tf''(t)\} = -2sF(s) - s^2F'(s) + f(0)$   
 ב. מצאו את המשוואה עבור  $F(s)$  אם ידוע כי  $f(t)$  היא פתרון של המשוואה  
 $ty'' + y' + ty = 0$  (שימו לב,  $t$  הוא משתנה);  
 ג. פתרו את המשוואה שהתקבלה בסעיף הקודם עבור  $F(s)$  (אין צורך למצוא התמרה הפוכה לאחר מכן).

שאלה 6 . (11 נקודות)

נגדיר

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ e^{t-1}, & t \geq 1 \end{cases}$$

- א. (2 נק') כתבו נוסחה ל-  $f(t)$  בעזרת הפונקציה  $u_c(t)$ ;  
 ב. (3 נק') חשבו את התמרת לפלס של  $f(t)$ ;  
 ג. (6 נק') פתרו בעזרת התמרת לפלס את הבעיה  
 $y'' - 4y' + 3y = f(t)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$