תרגיל בית 4 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הוכיחו את הטענה הבאה: A סגורה $\Leftrightarrow$ $A'\subseteq A$.

ב. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי $\mathbb{R}$:

1. $\mathbb{Q}$,
2. $(0,1)$.

שאלה 2

יהי X מ"מ ותהי $S\subseteq X$ תת קבוצה ו-$x\in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. $x\in S-S'$ (הפרש קבוצות).

ב. קיים $\varepsilon>0$ כך ש-$B(x,\varepsilon)\bigcap S=\{x\}$.

ג. לכל סדרה $\{x_n\}\subseteq S$, אם $x_n\to x$ אזי $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

שאלה 3

א. יהי X מ"מ שלם ותהי A תת קבוצה סגורה של X. הוכיחו ש-A תת מרחב מטרי שלם.

ב. יהי X מ"מ ו-$A\subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם של X. הראו ש-A תת קבוצה סגורה של X.

ג. הוכיחו או הפריכו: אם X מ"מ שלם, ו-$f:X\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי $f(X)$ תת מרחב שלם של $\mathbb{R}$.

שאלה 4

א) תהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה וחח"ע בין מרחבים מטריים, $X\subseteq A$ ו-$a\in X$ נקודת הצטברות של A. הוכיחו ש $f(a)$ נקודת הצטברות של $f(A)$.

ב) מצאו דוגמה נגדית לסעיף א' כשהפונקציה רציפה אבל אינה חח"ע.

שאלה 5

תהי $C\subseteq\mathbb{R}$ קבוצת קנטור.

א) הוכיחו ש $C=C'$.

ב) הראו שהפונקציה $f:C\to[0,1]$ המוגדרת ע"י

$f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{2}\right)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}$ אינה חח"ע.

שאלה 6

נגדיר מטריקה על $\mathbb{R}$ באופן הבא: $d(x,y)=\left|e^x-e^y\right|$.

א.הוכיחו שמטריקה זו שקולה למטריקה הסטנדרטית.

ב. במרחב המטרי $(\mathbb{R},d)$ הנ"ל הראו שהסדרה $\left\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קושי

שאינה מתכנסת.

ג.מצאו דוגמה לקבוצה X עם שתי מטריקות שקולות (טופולוגית) כך

ש(X,d) שלם ואילו (X,ρ) לא שלם.

שאלה 7

על הקבוצה $X=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ נגדיר שתי מטריקות : המטריקה הסטנדרטית

המושרית מ $\mathbb{R}$ שנסמנה d, והאולטרה מטריקה ρ המוגדרת ע"י

$\rho(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$.

א. האם המטריקות d,ρ שקולות טופולוגית מעל X?

ב. האם המטריקות שקולות במובן ליפשיץ?

בהצלחה!