אינפי 1 תרגיל 6

1. הוכיחו הפריכו: לכל שתי סדרות $(a_n),(b_n)$ מתקיים:
א. $\overline{\lim}(a_n-b_n)=\overline{\lim}a_n-\overline{\lim}b_n$
ב. $\underline{\lim}a_nb_a=\underline{\lim}a_n\underline{\lim}b_n$
פתרון:
א. הפרכה: נסתכל על הסדרות

$$a_n=\begin{cases}1 & n=2k+1\\ -1 & n=2k\end{cases}$$

ממבחן ההשוואה נקבל

$$b_n=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ 2 & n=2k\end{cases}$$

נקבל:

$$a_n-b_n=\begin{cases}1 & n=2k+1\\ -3 & n=2k\end{cases}$$

אזי $\overline{\lim}(a_n-b_n)=1$
ואילו $\overline{\lim}a_n-\overline{\lim}b_n=1-2=-1$
ב. הפרכה: עבור אותן סדרות נקבל:

$$a_nb_n=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ -2 & n=2k\end{cases}$$

$\underline{\lim}a_nb_a=-2$
ו־ $\underline{\lim}a_n\underline{\lim}b_n=-1\cdot 0=0$

2. תהי (a_n) סדרה חיובית יורדת. הוכיחו:
$\sum a_n$ מתכנס $\iff$ $\sum a_{5n}$ מתכנס.
$\Leftarrow$: (a_n) יורדת ולכן לכל n, $a_{5n}\le a_n$. ממבחן ההשוואה נקבל $\sum a_n$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum a_{5n}$ מתכנס.
$\Longrightarrow$: כזכור, מס' סופי של איברים לא משנה את התכנסות הטור, לכן אפשר להסתכל על הסדרה החל המאיבר החמישי.

לכל $0 \le i \le 4$ מתקיים: $a_{5n} \ge a_{5n+i}$.

$$\sum_{i=0}^{4} a_{5n+i} \le 5a_{5n}$$

נובע מכך ש

$$\sum_{n=5}^{\infty} a_n \le 5\sum_{n=1}^{\infty} a_{5n}$$

.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{5n}$ מתכנס $\Longleftarrow 5\sum_{n=1}^{\infty} a_{5n}$ מתכנס $\Longleftarrow \sum_{n=5}^{\infty} a_n \Longleftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.