

תרגיל בית 6 תורת גלואה - תשע"ח

1. תארו ע"י התאמת גלואה את התת-שדות של ההרחבות הבאות (בטאו כל תת-שדה ע"י יוצרים):

- א. E/\mathbb{Q} כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^5 - 1$ מעל \mathbb{Q} .
- ב. E/\mathbb{Q} כאשר E שדה הפיצול של $x^4 - 2$ מעל \mathbb{Q} .
- ג. $E/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^4 + 1$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
 היעזרו בשורש היחידה $\rho_8 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2. קבעו האם ההרחבות הבאות הן נורמליות או לא. באם לא, מצאו את הסגור הנורמלי.

- א. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$.
- ב. $\mathbb{Q}[\rho_5]/\mathbb{Q}$ כאשר ρ_5 הוא שורש יחידה 5-פרימיטיבי.
- ג. $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}(x^3)$.

3. הוכיחו כי כל הרחבה K/F ממימד 2 היא נורמלית.

4. תהיינה הרחבות סופיות $K/F, L/F$.

- א. נתון כי K/F הרחבת גלואה, הוכיחו כי KL/L היא הרחבת גלואה.
- ב. נתון כי $K/F, L/F$ הן גלואה, הוכיחו כי KL/F ו $K \cap L/F$ גלואה.

5. תהי E/F הרחבת גלואה ממימד p^n . הוכיחו כי לכל $1 \leq k < n$ קיים שדה ביניים $F \subseteq K \subseteq E$ כך ש $[E:K] = p^k$. (רמז: תכונה של תבורות (p) .)