

גאומטריה דיפרנציאלית – תרגיל 4

1. א. מצאו פרמטר טבעי עבור העקומה $\alpha(t) = (4 \cos t, 5 - 5 \sin t, -3 \cos t)$

ב. חשבו את העקמומיות, κ ואת הפיתול τ של עקומה זו.

ג. חשבו את אורך העקומה, עבור טווח הפרמטר $0 \leq t \leq 2\pi$

2. יהי $r(u^1, u^2)$ משטח פרמטרי ב- \mathbb{R}^3 . מצאו ביטוי עבור המכפלה הסקלרית $\langle r_{,ij}, r_{,kl} \rangle$ במונחים של: סימני כריסטופל, מקדמי התבנית היסודית הראשונה ומקדמי התבנית היסודית השנייה.

3. יהי $M \subseteq \mathbb{R}^3$ הגליל $\{x^2 + y^2 = 1\}$, עם המפות

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 \text{ המעבר } \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 : (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \rightarrow M : (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v) \\ \varphi_2 : (-\pi, \pi) \times (-\infty, \infty) \rightarrow M : (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v) \end{array} \right.$$

וגם $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ הן חלקות בתחום הגדרתן. (ולכן האטלס $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ הוא אטלס חלק)

4. יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום, ותהי $f(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חלקה בשני משתנים. הגרף של f הוא

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

א. מצאו פרמטריזציה רגולרית עבור הגרף (לא קשה)

ב. חשבו את התבנית היסודית הראשונה והשנייה.

ג. חשבו את אופרטור הצורה, עקמומיות גאוס והעקמומיות הממוצעת.

5. תהי $x = \sqrt{4 - z^2}$ עקומה במישור $[xz]$

א. מצאו פרמטריזציה של משטח הסיבוב $M \subseteq \mathbb{R}^3$ של עקומה זו סביב ציר z , ושרטטו אותו.

ב. מצאו את ערכי העקמומיות הראשיים $\kappa_1 \geq \kappa_2$.

ג. מצאו את סימני כריסטופל של המשטח M , Γ_{ij}^k .

ד. רשמו את המשוואות הגאודזיות. (אין צורך לפתור אותן).