תרגיל 6 באינפי 2 מדמ"ח

שאלה 1

$$\frac{4}{9}(e-1) \le \int\limits_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)}\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}(e-1)$$

נחפש נקודות קיצון של הפונקציה

$$g(x) = \frac{1}{(1+x)(2-x)}$$

על התחום $[0,1]$.
ראשית נסתכל על הקצוות

$$g(0) = \frac{1}{2}$$

$$g(1) = \frac{1}{2}$$

כמו כן

$$g'(x) = -\frac{2-x-(1+x)}{(1+x)^2(2-x)^2}$$

נקבל שהנגזרת מתאפסת כאשר

$$1-2x=0$$

כלומר

$$x = \frac{1}{2}$$

$$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})} = \frac{4}{9}$$

כמו כן $g(x)$ היא פונקציה אי שלילית ולכן לפי אי שוויונות של אינטגרלים

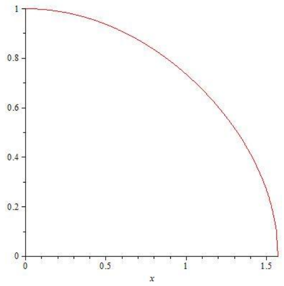
$$\frac{4}{9}(e-1) = \frac{4}{9}\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x \le \int\limits_0^1 \frac{e^x}{(1+x)(2-x)}\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e-1)$$

שאלה 2

לפי לופיטל

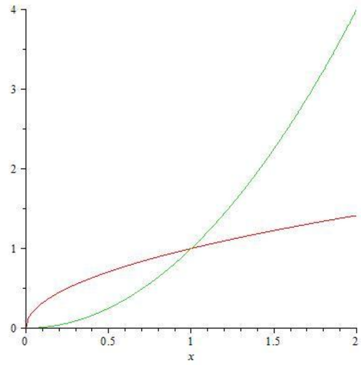
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^2}\sin t^2 \mathrm{d}t}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4 2x}{6x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4}{3x^4}=\frac{1}{3}$$

3 א



פתרון: $V=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\cos x}\right)^2 dx=\pi\sin x\ \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ב.



פתרון: נמצא את נקודות החיתוך של שתי העקומות

$$y=x^2, x=y^2$$

$$x^4=x$$

$$x\left(x^3-1\right)=0$$

$$x_1=0, x_2=1$$

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{y}\right)^2 dy-\pi\int_0^1\left(y^2\right)^2 dy=\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^1-\frac{\pi}{5}y^5\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$$

שאלה 4

נגזור ונשווה ל 0. הנגזרת של

$$F(x)=\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

היא

$$F'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=2\frac{\sin x^2}{x}$$

הנגזרת שווה ל 0 כאשר $x=\sqrt{\pi k}$ $k\in\mathbb{N}$.
נבצע נגזרת שניה ונקבל

$$F''(x)=2\frac{\cos x^2 2x\cdot x-\sin x^2}{x^2}$$

$$F''(\sqrt{\pi k})=4\cos\pi k=4(-1)^k$$

נקבל שנק' מינימום מקומי תתקבלנה כאשר $x=\sqrt{2\pi k}$ $k\in\mathbb{N}$.

שאלה 5

סעיף א

סעיף 1

הוכחה:
הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ כי היא רציפה. נניח בשלילה שהאינטגרל שלה הוא 0. זה אומר שהאינפימום של כל סכומי דרבו העליונים הוא 0.
קיים $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)>0$. נבחר $f(c)>M>0$. לפי הגדרת רציפות, קיים $\delta>0$ כך שאם $x\in[c-\delta,c+\delta]$ מתקיים $f(x)>M$.
קל לראות שבכל סכום עליון $\overline{S}$ של דרבו שניקח יתקיים ש

$$\overline{S}\geq 2\delta M>0$$

(כי הסכום יכיל לפחות את המלבן שנוצר בשטח $2\delta M$)
ולכן האינפימום של הסכומים העליונים הוא לפחות $2\delta M>0$ בסתירה.

סעיף 2

הפרכה: ניקח על הקטע $[0,1]$ את

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\neq\frac{1}{2}\\ 1 & x=\frac{1}{2}\end{cases}$$