שיעור חזרה-עוזי

תרגיל 1. יהי V מ"ו. תהי S קבוצה פורשת של V, אזי הבכרח $0 \notin S$?
לא נכון, למשל $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^2$. שימו לב, אבל היא הינה יכולה להיות בסיס!

תרגיל 2. יהיו A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר כך ש-A משולשית עליונה ו-B משולשית תחתונה אז AB היא אלכסונית?
לא נכון,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=AB}$$

תרגיל 3. אם $AB = BA$ אז $AB^2 = B^2 A$?
נכון,

$$AB^2 = ABB = BAB = BBA = B^2 A$$

שימו לב שאפשר להכליל את זה ל-$A^m B^n = B^n A^m$

תרגיל 4. תהי A המקיימת $A^3 + A^2 - A - I = 0$ אז Aהפיכה?
נכון,

$$\begin{gathered} A^3 + A^2 - A - I = 0 \\ \Downarrow \\ A\left(A^2 + A - I\right) = I \end{gathered}$$

ו-

$$\begin{gathered} A^3 + A^2 - A - I = 0 \\ \Downarrow \\ \left(A^2 + A - I\right) A = I \end{gathered}$$

כלומר A הפיכה ומתקיים $A^{-1} = A^2 + A - I$

תרגיל 5. תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש-Aמאפסת את $x^2 + x$ כלומר $A^2 + A = 0$ אזי A אינה הפיכה?
לא נכון, ניקח את $A = -I$ ונקבל

$$A^2 + A = (-I)^2 + (-I) = 0$$

תרגיל 6. אם $Span\,(A) \subseteq Span\,(B)$אז $A \subseteq B$
לא נכון,

$$Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

אך

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \notin \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל 7. אם$A \subseteq B$ אז $Span\left(A\right) \subseteq Span\left(B\right)$
נכון, יהיה $A = \{v_1, \ldots v_n\}$ ו-$B = \{v_1, \ldots v_n, w_1, \ldots w_m\}$ אז

$$\begin{aligned} Span\left(A\right) &= \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n | \alpha_i \in \mathbb{F}\} = \\ &= \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + 0w_1 + \ldots + 0w_m | \alpha_i \in \mathbb{F}\} \subseteq \\ &\subseteq \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m | \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{F}\} = Span\left(B\right) \end{aligned}$$

תרגיל 8. אם $U, W \leq V$ תתי מרחבים המקיימים $dim\left(U\right) = dim\left(W\right)$ אז $U = W$
לא נכון, ניקח $U = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ו- $W = Span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ אז $dim\left(U\right) = dim\left(W\right) = 1$ אך $U \neq W$.

תרגיל 9. אם y_1 ו-y_2 פתרונות למערכת $Ax = 0$ אז $y_1 + 4y_2$ הוא גם פתרון לאותה מערכת?
נכון,

$$A\left(y_1 + 4y_2\right) = Ay_1 + A4y_2 = Ay_1 + 4Ay_2 = 0 + 4 \cdot 0 = 0$$

תרגיל 10. אם y_1 ו-y_2 פתרונות למערכת $Ax = b$ ($b \neq 0$) אז $y_1 + 4y_2$ הוא גם פתרון לאותה מערכת?
לא נכון, תהי המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2$$

אז $y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו-$y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ פותרים את המשוואה אך $y_1 + 4y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ אינו פותר את המשוואה כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 10 \neq 2$$

למעשה זה תמיד לא יהיה פתרון של המערכת (הוכיחו בבית!)

תרגיל 11. אם u, v בת"ל ו-$w \in Sapn\left\{u, v\right\}$ אז $\{u, v, w\}$ ת"ל
נכון, היות ו-

$$w \in Sapn\left\{u, v\right\}$$

קיימים α, β כך ש-

$$w = \alpha u + \beta v$$

לכן

$$0 = \alpha u + \beta v - w$$

כלומר קיים צל לא טריוואלי שיתן לנו את וקטור ה-0 ולכן $\{u, v, w\}$ת"ל.

תרגיל 12. למערכת בעלת שתי משוואות ו3- נעלמים בהכרח יהיה אינסוף פתרונות?
לא נכון, למערכת

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \end{cases}$$

אין פתרון.

תרגיל 13. האם $Span\left(S\right) = S$?
לא נכון, ניקח $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ אז

$$Span\left(S\right) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\} \ni \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

אך $S \notin \left(\begin{array}{c}2\\2\end{array}\right)$

למעשה יש הכלה בכיוון אחד $S \subseteq Span\left(S\right)$,

הוכחה: יהיה $w \in S$ אז $w = 1w + 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n \in Span\left(S\right)$

תרגיל 14. יהיה Sתת מרחב אז מתקיים $Span\left(S\right) = S$?

נכון, כדי להוכיח שיוון יש להראות את ההחלה מהכיוון השני כלומר $S \supseteq Span\left(S\right)$.
נניח בשלילה ש-$Span\left(S\right) \not\supseteq S$זה אומר שקיים ווקטור $v \in Span\left(S\right)$ אך $v \notin S$, אם $v \in Span\left(S\right)$ אז vהוא צ"ל של אברי S ולכן $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ כיוון ש-Sתת מרחב יש סגירות לכפל בסקלר וחיבור ווקטורים ולכן $v \in S$ סתירה.

תרגיל 15. האם S הוא בסיס לתת מרחב $Span\left(S\right)$?

לא נכון, ניקח $S = \left\{\left(\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right), \left(\begin{array}{c}2\\2\end{array}\right)\right\}$ אז Sת"ל ולכן אינה יכולה להיות בסיס.

תרגיל 16. יהי $S = \{v_1, v_2.v_3\}$ קבוצה בת"ל נגדיר $S^* = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$
האם בהכרח S^* בת"ל?

נכון, נראה שרק הצירוף הלינארי הטריוואלי נותן

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2\left(v_1 + v_2\right) + \alpha_3\left(v_1 + v_2 + v_3\right) = 0$$

נכנס איברים לפי הווקטורים v_1, v_2, v_3 ונקבל

$$\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\right)v_1 + \left(\alpha_2 + \alpha_3\right)v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

ידוע ש-v_1, v_2, v_3 בת"ל לכן המקדמים חייבים להיות שווים ל-0

$$\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0\\ \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0\\ \alpha_3 & = & 0\end{cases}$$

מכאן

$$\begin{cases}\alpha_1 & = & 0\\ \alpha_2 & = & 0\\ \alpha_3 & = & 0\end{cases}$$