תזכורת:
יהי z מספר מרוכב שמוצג בצורה פולרית, כלומר

$$rcis(\theta)$$

אנחנו רוצים לפתור את המשוואה:

$$x^n = rcis(\theta)$$

אמרנו שלמשוואה יש n פתרונות, והצורה הכללית שלהם היא:

$$\sqrt[n]{r}cis(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n})$$

כאשר בk מציבים את המספרים מ0 עד $n-1$.
לדוגמא: פתרו את המשוואה

$$x^3 = 5cis(\frac{\pi}{7})$$

פתרון: הצורה הכללית של הפתרון היא:

$$x_k = \sqrt[3]{5}cis(\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi k}{3})$$

$$x_0 = \sqrt[3]{5}cis(\frac{\pi}{21})$$

$$x_1 = \sqrt[3]{5}cis(\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi}{3})$$

$$x_2 = \sqrt[3]{5}cis(\frac{\pi}{21} + \frac{4\pi}{3})$$

תרגיל: פתרו את המשוואה הבאה:

$$z^5 = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

פתרון: ראשית, נעביר את $-\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$ להצגה פולרית.
$r = \sqrt{(-\frac{5}{2})^2 + (-\frac{5\sqrt{3}}{2})^2} = 5$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{5\sqrt{3}}{2}}{-\frac{5}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}(+\pi)$$

המספר שלנו ברביע השלישי ולכן צריך להוסיף π. אז סה"כ

$$-\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i = 5cis(\frac{4\pi}{3})$$

כלומר, אנחנו רוצים לפתור את המשוואה:

$$z^5 = 5cis(\frac{4\pi}{3})$$

פתרון כללי:

$$z_k = \sqrt[5]{5}cis(\frac{4\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5})$$

$$z_0 = \sqrt[5]{5}cis(\frac{4\pi}{15})$$

$$z_1 = \sqrt[5]{5}cis(\frac{4\pi}{15} + \frac{2\pi}{5})$$

$$z_2 = \sqrt[5]{5}cis(\frac{4\pi}{15} + \frac{4\pi}{5})$$

$$z_3 = \sqrt[5]{5}cis(\frac{4\pi}{15} + \frac{6\pi}{5})$$

$$z_4 = \sqrt[5]{5}cis(\frac{4\pi}{15} + \frac{8\pi}{5})$$

אם נציב $k = 5$ נקבל $\sqrt[5]{5}cis(\frac{4\pi}{15} + \frac{10\pi}{5}) = \sqrt[5]{5}cis(\frac{4\pi}{15} + 2\pi) = \sqrt[5]{5}cis(\frac{4\pi}{15})$ שזה z_0.

שאלה: מה היה קורה אם הייתם מתבקשים לפתור תרגיל מהצורה:

$$z^n = -rcis(\theta)$$

פתרון: למעשה $-rcis(\theta) = (-1)rcis(\theta)$

נעביר את -1 לצורה פולרית.

$-1 = 1cis(\pi)$

ולכן

$$-rcis(\theta) = 1cis(\pi)rcis(\theta) = rcis(\pi + \theta)$$

הערה: חילוק מספרים בצורה פולרית:

$$\frac{rcis(\theta_1)}{scis(\theta_2)}=\frac{r}{s}cis(\theta_1-\theta_2)$$

הוכחה: זה נובע מנוסחת הכפל וההופכי.
לחלק במספר= להכפיל בהופכי. כלומר,

$$\frac{rcis(\theta_1)}{scis(\theta_2)}=rcis(\theta_1)\cdot\frac{1}{scis(\theta_2)}=rcis(\theta_1)\cdot(\frac{1}{s}cis(-\theta_2))=\frac{r}{s}cis(\theta_1-\theta_2)$$

(משתמשים בנוסחא של הופכי בצורה פולרית שהוכחנו בשיעור הקודם, וכן בנוסחת הכפל.)
מסקנה: למדנו שלמספר מרוכב יש n שורשים מסדר n.
למעשה, יש קשר בין השורשים.
כלומר, השורשים הם:

$$z_0,z_1,...,z_{n-1}$$

המנה בין כל שניים עוקבים היא קבועה:

$$\frac{z_{k+1}}{z_k}=\frac{\sqrt[n]{r}cis(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi(k+1)}{n})}{\sqrt[n]{r}cis(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n})}=cis(\frac{2\pi}{n})$$

מסקנה: ברגע שמצאנו שורש nי מסויים, אנחנו יכולים באמצעותו למצוא את כל השאר. נכפיל את השורש שמצאנו ב$cis(\frac{2\pi}{n})$ ונקבל שורש נוסף. ואז נכפיל אותו ב$cis(\frac{2\pi}{n})$ ונקבל עוד שורש. וכו'.
דרך נוספת להסתכל על זה: לכל מספר מרוכב יש n שורשים מסדר n, והם יוצרים מצולע משוכלל בין n צלעות, כאשר הקודקודים הם השורשים, והזוויות בינהן הן בדיוק $\frac{360}{n}$.
תכונות של שורשים:
1. יהי z מספר מרוכב, ו

$$z_0,...,z_{n-1}$$

כל שורשי הn שלו. כלומר, כל המספרים המרוכבים שמקיימים:

$$x^n=z$$

אזי:

$$z_0+z_1+...+z_{n-1}=0$$

הוכחה: נניח $z = rcis(\theta)$, אז:

$$z_k = \sqrt[n]{r}cis(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n})$$

$$z_0 = \sqrt[n]{r}cis(\frac{\theta}{n})$$

$$z_1 = z_0 cis(\frac{2\pi}{n})$$

$$z_2 = z_1 cis(\frac{2\pi}{n})$$

וכו'
בעצם מתקבלת סדרה הנדסית,

$$a_1 = z_0 = \sqrt[n]{r}cis(\frac{\theta}{n})$$

$$q = cis(\frac{2\pi}{n})$$

ויש בה n איברים. נשתמש בנוסחא לסכום סדרה הנדסית:

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{z_0((cis(\frac{2\pi}{n}))^n - 1)}{cis(\frac{2\pi}{n}) - 1} = \frac{z_0(cis(\frac{2\pi}{n} \cdot n) - 1)}{cis(\frac{2\pi}{n}) - 1} =$$

$$\frac{z_0(cis(2\pi) - 1)}{cis(\frac{2\pi}{n}) - 1} = \frac{z_0(cis(0) - 1)}{cis(\frac{2\pi}{n}) - 1} = \frac{z_0(1 - 1)}{cis(\frac{2\pi}{n}) - 1} = 0$$

2. יהי z מספר מרוכב, ו

$$z_0, ..., z_{n-1}$$

כל שורשי הn שלו. כלומר, כל המספרים המרוכבים שמקיימים:

$$x^n = z$$

אזי:

$$z_0 \cdot z_1 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1} z$$

הוכחה: מציבים: $z = rcis(\theta)$.

$$z_k = \sqrt[n]{r}cis(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n})$$

$$z_0 = \sqrt[n]{r}cis(\frac{\theta}{n})$$

$$z_1 = z_0cis(\frac{2\pi}{n})$$

$$z_2 = z_1cis(\frac{2\pi}{n}) = z_0cis(\frac{4\pi}{n})$$

$$z_0 \cdot z_1 \cdots z_{n-1} = z_0(z_0cis(\frac{2\pi}{n}))(z_0cis(\frac{4\pi}{n}))(z_0cis(\frac{6\pi}{n}))\cdots(z_0cis(\frac{(n-1)2\pi}{n})) =$$

$$z_0^n\left[cis(\frac{2\pi}{n})cis(\frac{4\pi}{n})\cdots cis(\frac{(n-1)2\pi}{n})\right] =$$

ניזכר ש:

$$z_0^n = z$$

לכן:

$$= z\left[cis(\frac{2\pi}{n})cis(\frac{4\pi}{n})\cdots cis(\frac{(n-1)2\pi}{n})\right] =$$

$$z\left[cis\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4\pi}{n} + \cdots + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right)\right]$$

הזווית הפנימית היא סכום סדרה חשבונית.

$$a_1 = \frac{2\pi}{n}$$

$$d = \frac{2\pi}{n}$$

ויש $n-1$ איברים.
נשתמש בנוסחא של סכום סדרה חשבונית.

$$\frac{n-1}{2}[\frac{2\pi}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n}] = \frac{n-1}{2} \cdot 2\pi = (n-1)\pi$$

סה"כ, קיבלנו שהסכום שווה ל:

$$zcis((n-1)\pi)$$

למה שווה $cis((n-1)\pi)$. תלוי אם n זוגי או אי-זוגי.
אם $n-1$ זוגי אז יש כפולות של 2π ואז $cis((n-1)\pi)=1$
ואם $n-1$ אי זוגי אז יש כפולות של 2π ועוד π. ואז זה שווה ל$-1=cis(\pi)$.
וכזכור $n-1$ זוגי אמ"ם n אי זוגי.
ו$n-1$ הוא אי זוגי אמ"ם n זוגי.

שורשי היחידה

הגדרה: אוסף הפתרונות של המשוואה

$$z^n=1$$

נקרא "שורשי היחידה מסדר n".
למשל: שורשי היחידה מסדר 2: $1,-1$
שורשי היחידה מסדר 3:

$$z^3=1cis(0)$$

$$1=1cis(\frac{0}{3}),1cis(\frac{2\pi}{3}),1cis(\frac{4\pi}{3})$$

שורשי היחידה מסדר 4: $1,-1,i,-i$
באופן כללי: שורשי היחידה מסדר n הם כל המספרים מהצורה

$$cis(\frac{2\pi k}{n})$$

הגדרה: "שורשי היחידה" זה הקבוצה של כל שורשי היחידה מכל סדר.
תרגיל: כפל של שני שורשי יחידה הוא שורש יחידה.
הוכחה: יהיו z_1,z_2 שני שורשי יחידה. נניח שz_1 הוא שורש יחידה מסדר n, וz_2 הוא שורש יחידה מסדר m.

$$z_1=cis(\frac{2\pi k_1}{n}),z_2=cis(\frac{2\pi k_2}{m})$$

$$z_1\cdot z_2=cis(\frac{2\pi k_1}{n})cis(\frac{2\pi k_2}{m})=cis(\frac{2\pi k_1}{n}+\frac{2\pi k_2}{m})=$$

$$cis(\frac{2\pi(k_1m+k_2n)}{nm})$$

זה שורש יחידה מסדר nm.
תרגיל: מצאו את כל שורשי היחידה מסדר 5:

$$x^5=1=cis(0)$$

$$z_k = cis(0 + \frac{2\pi k}{5})$$

$$z_0 = cis0 = 1$$

$$z_1 = cis(\frac{2\pi}{5})$$

$$z_2 = cis(\frac{4\pi}{5})$$

$$z_3 = cis(\frac{6\pi}{5})$$

$$z_4 = cis(\frac{8\pi}{5})$$

הערה: אם z הוא שורש יחידה מסדר n, אז גם $\bar{z}$ הוא שורש יחידה מסדר n.
הוכחה: z הוא שורש יחידה מסדר n, זה אומר ש$z^n = 1$.
נחשב:

$$\bar{z}^n = \bar{z} \cdot \bar{z} \cdots \bar{z} = \overline{z \cdots z} = \overline{(z^n)} = \bar{1} = 1$$

ניזכר בכלל:

$$\bar{z_1} \cdot \bar{z_2} = \overline{z_1 z_2}$$

הכללה: ההערה נכונה לכל מספר ממשי, לא רק 1. כלומר, אם a הוא מספר ממשי, וz הוא שורש n-י של a, אז $\bar{z}$ הוא גם שורש n-י של a.