## תרגיל 1:

פתרון:

1) $y' = \frac{y-1}{x+2}$

זו מד"ר ניתנת להפרדה:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+2}$$

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$\ln(y-1) = \ln(x+2) + \tilde{c} \;/\; e^{\cdot}$$

$$y-1 = c\cdot e^{x+2}$$

1.a פתרון כללי $y = c\,e^{x+2} + 1$

$$7 = y(1) = c\,e^{3} + 1 \Rightarrow 6 = c\,e^{3} \Rightarrow c = \frac{6}{e^3}$$

$$y = \frac{6}{e^3}\,e^{x+2} + 1 = 6\cdot e^{x-1} + 1$$

$$y(-1) = 6\cdot e^{-2} + 1 \approx 1.812$$

2) $y\cdot y' = e^{x+y^2}$

$$y\cdot\frac{dy}{dx} = e^{x}\cdot e^{y^2}$$

שוב מד"ר ניתנת להפרדה:

$$y\cdot e^{-y^2}dy = e^{x}\cdot dx$$

$$\int y\,e^{-y^2}dy = \int e^{x}dx$$

$$\int y\,e^{-y^2}dy = -\frac{1}{2}\int -2y\,e^{-y^2}dy = -\frac{1}{2}\int\frac{\partial(e^{-y^2})}{\partial y}dy = -\frac{1}{2}e^{-y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{2}e^{-y^2} = e^{x} + \tilde{c} \;/\cdot -2$$

(2.a) $e^{-y^2} = -2e^{x} + c.$ צורה סתומה לפתרון כללי

(2.b) נמצא פתרון פרטי נתון $y(0)=2$ :

$$e^{-4} = -2\cdot e^{0} + c$$

$$\boxed{c = e^{-4}+2}.$$

$$e^{-y^2} = -2e^{x} + e^{-4} + 2$$

$$e^{-y^2(1)} = -2e^{1} + 2 + e^{-4}$$

$$e^{-y^2(1)} = -3.418$$

לא נוכל לחשב את $y(1)$. כיוון שאגף ימין שלילי לעומת

כאשר אגף שמאל חיובי.

---

3. $y' tg(x) + y = 2\sin x \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$

$$y = y^h + y^p.$$

$$y_h' tg(x) + y_h = 0$$

$$\frac{dy_h}{dx} tg(x) = -y_h$$

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int \frac{1}{tg(x)} dx$$

$$\ln(y_h) = \int -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = -\ln(\sin x) + \tilde{c}.$$

$$\ln(y_h) = -\ln(\sin x) + \tilde{c} \quad / e.$$

$$\ln(y_h) = \ln\left(\frac{1}{\sin x}\right) + \tilde{c} \quad / e$$

$$y_h = c\cdot\frac{1}{\sin x}$$

$$y_p = C(x)\cdot\frac{1}{\sin x}$$

$$y_p'\cdot tg(x) + y_p = 2\sin x$$ נציב במד"ר

$$y_p' = C'(x)\cdot\frac{1}{\sin x} + C(x)\cdot\left(\frac{-\cos x}{\sin^2 x}\right)$$

$$\left[C'(x)\cdot\frac{1}{\sin x} + C(x)\cdot\left(\frac{-\cos x}{\sin^2 x}\right)\right]tg(x) + C(x)\cdot\frac{1}{\sin x} = 2\sin x$$

$$c'(x)\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \cancel{\frac{c(x)}{\sin x}}\cdot \quad + \cancel{\frac{c(x)}{\sin x}} = 2\sin x$$

$$c'(x)\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x} = 2\sin x \quad \Big| : \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$c'(x) = \frac{2\sin x\cdot\sin^2 x}{\cos x} = \frac{2\sin^3 x}{\cos x}$$

$$c'(x) = 2\cdot\frac{(\sin(x))^3}{\cos x}$$

$$c(x) = 2\int\frac{(\sin(x))^3}{\cos x}dx \quad \Big| \quad \begin{matrix}\cos x = v \\ -\sin x\, dx = dv\end{matrix}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - v^2$$

$$c(x) = -2\int\frac{\sin^2 x\cdot -\sin x\,dx}{v} =$$

$$= -2\int\frac{(1-v^2)}{v}dv = -2\int\frac{1-v^2}{v}dv =$$

$$= -2\cdot\left[\int\left(\frac{1}{v} - \frac{v^2}{v}\right)dv\right] = -2\int\left(\frac{1}{v} - v\right)dv =$$

$$= -2\left[\ln v - \frac{v^2}{2}\right) = -2\ln v + v^2$$

$$c(x) = -2\ln\cos(x) + \cos^2 x$$

$$y_p = \left(\frac{-2\ln\cos(x) + \cos^2 x}{\sin x}\right) \quad , \quad y = y_h + y_p.$$

את הקבועים $c_n$ ניתן למצוא אם בנוסף נתון תנאי התחלה $u(x,0)=f(x)$ (ולצורך זה נלמד פיתוח פונקציה בטור פורייה (טור סינוסים במקרה זה) ואת נוסחת מקדמי פורייה המתאימה לו).

**הערה:** הבעיה (4) שקיבלנו היא דוגמה **לבעיית שטורם-ליוביל**. כפי שראינו, כל הפונקציות העצמיות וכן כל צרוף ליניארי שלהן פתרונות לבעיה זו, לכן קבוצת הפתרונות היא מרחב ליניארי ממימד אינסופי.

**דוגמה 2:**
$$\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0 \\ y'(0)=0\ ,\ y'(L)=0 \end{cases} \qquad (5)$$

**פתרון:** נחפש פתרון בצורה: $y(x)=e^{rx}$. המשוואה האופיינית היא: $r^2+\lambda=0$.

**מקרה א:** $\omega^2=\lambda>0$, $\omega>0$. לכן $\lambda=\pm i\omega \Leftarrow y(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$.

נגזור: $\lambda=\pm i\omega \quad \Leftarrow \quad y'(x)=-A\omega\sin(\omega x)+B\omega\cos(\omega x)$

נציב תנאי שפה:
$$0=y'(0)=B\omega\ ,\ \omega\neq 0 \ \Rightarrow\ B=0 \ \Rightarrow\ y(x)=A\cos(\omega x)$$

וכן $0=y'(L)=-A\omega\sin(\omega L)\ ,\ A,\omega\neq 0 \ \Rightarrow\ \omega L=n\pi, n=1,2,3,.....$.

לכן,
$$\omega_n=\frac{n\pi}{L}\ ,\ n=1,2,3,... \ \Rightarrow\ y_n(x)=\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ ,\ n=1,2,3,....$$

(ללא הגבלת הכלליות, כפתרונות המשוואה ההומוגנית בוחרים $A=1$).

נסמן: $\phi_n(x)=\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n=1,2,3,....$ **פונקציות עצמיות**.

ו- $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\ ,\ n=1,2,3,.....$ הם **ערכים עצמיים** של הבעיה.

**מקרה ב:** $\lambda=0$. לכן $r=0$ שורש כפול. זה גורר $y(x)=A+Bx$.

נציב תנאי שפה:
$$0=y'(0)=B \ \Rightarrow\ B=0 \ \Rightarrow\ y(x)=A$$

וכן
$$0=y'(L)=B \Rightarrow B=0$$

ולכן הפתרון הוא $y(x)=1$ (ללא הגבלת הכלליות שוב בוחרים $A=1$).

נסמן $\phi_0(x)=1$ **פונקציה עצמית**. **הערך העצמי** המתאים הוא $\lambda_0=0$.

**מקרה ג:** $-\omega^2=\lambda<0$, $\omega>0$. לכן $\lambda=\pm\omega \Leftarrow y(x)=Ae^{\omega x}+Be^{-\omega x}$.

נגזור: $y'(x)=A\omega e^{\omega x}-B\omega e^{-\omega x}$.

נציב תנאי שפה:
$$0=y'(0)=A\omega-B\omega\ ,\ \omega\neq 0 \Rightarrow B=A \Rightarrow y(x)=A(e^{\omega x}+e^{-\omega x})$$

וכן $0=y'(L)=A\omega(e^{\omega L}-e^{-\omega L})$. אבל $e^{\omega L}-e^{-\omega L}\neq 0, \omega, L>0 \Rightarrow A=0$, פתרון טריביאלי.

לכן נותרנו רק עם מקרים א) ו- ב). ניתן לכתוב את כל **הפונקציות העצמיות** שקיבלנו בצורה

$$\phi_n(x)=\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n=0,1,2,3,....,$$

**והערכים העצמיים** הם $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\ ,\ n=0,1,2,3,.....$.

## 8.4 בעיה דומה לשטורם-ליוביל המובילה לטורי פורייה

נסתכל על הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0 \\ y(-L)=y(L) \\ y'(-L)=y'(L) \end{cases} \qquad (1)$$

זוהי בעיה בקטע $[-L,L]$ . הדרישה היא כי הפונקציה והנגזרת מקבלים אותו ערך בקצות הקטע.

במקרה זה ניתן יהיה להמשיך את הפונקציה בצורה מחזורית, כך שמחזורה יהיה $2L$, ע"י הגדרת $y(x+2L)=y(x)$.

שימו לב כי תנאיי השפה אינם מופרדים ולכן בעיה זו אינה בעיית שטורם ליוביל. בכל זאת חלק ניכר מהמשפטים (או דומים להם) נשארים בתוקף. נדון בהמשך במשפטים עצמם.

נפתור את הבעיה: המשוואה האופיינית היא $r^2+\lambda=0$.

**מקרה א:** $\omega^2=\lambda>0$ , $\omega>0$. לכן $\lambda=\pm i\omega \Leftarrow y(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$.

נגזור: $\lambda=\pm i\omega \Leftarrow y'(x)=-A\omega\sin(\omega x)+B\omega\cos(\omega x)$

נציב תנאי שפה:

$$0=y(-L)-y(L)=2B\sin(\omega L)$$
$$0=y'(-L)-y'(L)=2A\omega\sin(\omega L)$$

אם $\sin(\omega L)\neq 0 \Leftarrow A=B=0$ , ולכן פתרון טריביאלי.

לכן $\sin(\omega L)=0 \Leftarrow n=1,2,3,....$ , $\omega=\frac{\pi n}{L}$ ולכן,

$$y(x)=A\cos(\frac{n\pi x}{L})+B\sin(\frac{n\pi x}{L})$$

$A,B$ חופשיים. לכן יש **פונקציות עצמיות**

$$\phi_n(x)=\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ \psi_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ \ n=1,2,3,....$$

**מקרה ב:** $\lambda=0$. לכן $r=0$ שורש כפול. זה גורר $y(x)=A+Bx$. מהצבה בתנאיי השפה מתקבל כי $\phi_0(x)=1$ היא **פונקציה עצמית** יחידה בתש"ל במקרה זה.

לא מתקבלות פ"ע מהמקרה $\lambda<0$).

**לסיכום:** סה"כ **הפונקציות העצמיות** שקיבלנו הן

$$\left\{\phi_n(x)=\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}_{n=0}^{\infty},\ \left\{\psi_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad (8.4.2)$$

**הערכים העצמיים** הם $n=0,1,2,3,...$ , $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$.

לע"ע $\lambda_0=0$ מתאימה הפונקציה העצמית $\phi_0=1$.

לע"ע $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, n=1,2,3,..$ מתאימות שתי פונקציות עצמיות $\phi_n(x)=\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ \psi_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.