אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 5

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

1. יהי חוג R יהיו שני אידיאלים $I,J \triangleleft R$ כך ש $I+J=R$. הוכח כי $I \cap J = IJ + JI$.
2. יהי חוג R יהיו שני אידיאלים $I,J \triangleleft R$ כך ש $I \cap J$ ראשוני. הוכח כי $I \subseteq J$ או $J \subseteq I$.
3. אמרו על האידיאלים הבאים מי מהם מקסימלי ומי ראשוני:
   a. $I = \{(0,n) : n \in \mathbb{Z}\} \triangleleft \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   b. $I = <2x+1> \triangleleft \mathbb{Z}[x]$.
4. הוכיחו כי $\mathbb{R}[x]/<x^2-1> \ncong \mathbb{R}[x]/<x^4-1>$.
5. יהי חוג R עם אידיאל מקסימלי יחיד $M \triangleleft R$ [מה שנקרא חוג מקומי].
   a. הוכח כי כל איבר שלא נמצא באידיאל הפיך.
   b. יהי $f: R \to S$ אפימורפיזם עבור איזשהו חוג $S \neq 0$. הוכח כי S מקומי.
6. חוג R נקרא ראשוני למחצה אם לא קיים אידיאל $0 \neq I \triangleleft R$ כך ש $I^2=0$. אידיאל P בחוג כלשהו R נקרא ראשוני למחצה אם R/P הוא חוג ראשוני למחצה. הוכח כי $P \triangleleft R$ ראשוני למחצה אם ורק אם לכל $a \in R$, אם $aRa \subseteq P$ אז $a \in P$.
7. מצאו a חיובי שלם המקיים $a \equiv 1 \pmod{11}$, $a \equiv 2 \pmod 9$ ו$a \equiv 4 \pmod 5$.