חשבון אינפיניטסימלי 3 - תרגול 7

תקציר

התרגול עוסק בנגזרות מסדר גבוה, פולינום טיילור ומשפט הפונקציה ההפוכה ופונקציה הסתומה ובכלל שרשרת .

1 נגזרות מסדר גבוה.

הגדרה 1.1. נגזרת מעורבת מסדר 2 היא ביטוי מהצורה

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right).$$

הערה. אם $i = j$, מסמנים:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

כמו כן, לעיתים נשמש בסימון

$$f_{x_j x_i} = f''_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

שימו לב, בסימון הראשון הגזירה היא מימין למשמאל ובסימון השני משמאל לימין.

דוגמה 2.1. עבור הפונקציה $f(x,y,z) = e^z \cos(xy)$,

$$\begin{aligned} f_{yx} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} e^z \cos(xy)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-x e^z \sin(xy)\right) \\ &= -e^z \sin(xy) - xye^z \cos(xy), \\ f_{xx} = \frac{\partial^2 (e^z \cos xy)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} e^z \cos xy\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-ye^z \sin xy\right) \\ &= -y^2 e^z \cos xy \end{aligned}.$$

הערה. בהגדרה, יש חשיבות לסדר הגזירה ולא בהכרח מתקיים:

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

דוגמה 3.1. עבור $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0).$$

המשפט הבא נותן תנאים מספיקים בהם הנגזרות המעורבות שוות.

משפט 4.1. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, ותהי $f : A \to \mathbb{R}^m$. אזי, אם כל הנגזרות המעורבות מסדר 2 קיימות ורצפות, מתקיים

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

הגדרה 5.1. נגדיר נגזרות מעורבות מסדר k באופן רקורסיבי על ידי:

$$f_{i_1 \ldots i_k = } f^{(k)}_{i_1 \ldots i_k} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial f_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}\right).$$

יש משפט מקביל לנגזרות מסדר k שנותן תנאים מספיקים בהם סדר גזירה לא חשוב.

משפט 6.1. אם הנגזרות המעורבות עד k קיימות ורציפות אזי סדר גזירה לא משנה. כלמר: לכל תמורה σ על k מתקיים:

$$\frac{f^k f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(k)}} \ldots \partial x_{i_{\sigma(1)}}}.$$

דוגמה 7.1. עבור $f(x,y,z) = e^z \cos xy$, מתקיים:

$$f^{(3)}_{xyz} = f^{(3)}_{xzy}$$

בגלל רציפות של נגזרות. נבדוק זאת על ידי חישוב:

$$\begin{aligned}
f^{(3)}_{xyz} &= \left(e^z \cos xy\right)_{xyz} \\
&= \left(\left(e^z \cos xy\right)'_x\right)''_{yz} \\
&= \left(-ye^z \sin xy\right)''_{yz} \\
&= \left(-e^z \sin xy - e^z xy \cos xy\right)_z \\
&= -e^z\left(\sin xy + xy \cos xy\right), \\
f^{(3)}_{xzy} &= \left(e^z \cos xy\right)^{(3)}_{xyz} \\
&= \left(-ye^z \sin xy\right)''_{zy} \\
&= \left(-ye^z \sin xy\right)'_y \\
&= -e^z\left(\sin xy + xy \cos xy\right)
\end{aligned}$$

ושוב, יש שוויון בינהם.

הגדרה 8.1. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו $f : A \to \mathbb{R}^m$. נאמר ש $f \in \mathcal{C}^k(A)$ אם כל הנגזרות המעורבות עד סדר k קיימות ורציפות.

תרגיל 9.1. תהי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ כך ש $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. נניח, ש $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. הראו, שקיימתות $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירות, כך ש $f(x,y) = g(x) + h(y)$.

פתרון. נשים לב, שכיוון ש $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, מתקיים:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

בנוסף, נשים לב, שאם $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ מקיימת, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ בכל $\mathbb{R}^2$, אזי F אינה תלוייה ב x. זאת אומרת, שלכל y, $F(a,y) = F(b,y)$ לכל $a, b \in \mathbb{R}$, או באופן שקול, קיימת $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש $F(x,y) = G(y)$. על מנת לראות שהטענה נכונה, נשתמש במשפט ערך הממוצע: לכל $y \in \mathbb{R}$ ולכל $a < b \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$F(a,y) - F(b,y) = F'_x(c,y)(b-a) = 0(b-a) = 0$$

עבור $a \le c \le b$ ולכן F אינה תלויה ב x. באופן סימטרי, מראים שאם $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, אז F אינה תלוייה ב y. ולכן $\frac{\partial f}{\partial x}$ אינה תלוייה ב y ו $\frac{\partial f}{\partial y}$ אינה תלוייה ב x.

נסמן:

$$\phi(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \psi(y).$$

על פי ההנחה, $\phi = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\psi = \frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות, ולכו קיימות להן פונקציות קדומות:

$$\tilde{g}(x) = \int \phi(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\tilde{h}(y) = \int \psi(y)\,\mathrm{d}y$$

נסמן:

$$\tilde{f}(x,y) = \tilde{g}(x) + \tilde{h}(y).$$

נשים לב, ש f ו $\tilde{f}$ דיפרנציאביליות מכיוון, שהנגזרות החלקיות של שתיהן רציפות ומתקיים:

$$\begin{aligned}\nabla\left(f - \tilde{f}\right) &= \left(\frac{\partial\left(f - \tilde{f}\right)}{\partial x}, \frac{\partial\left(f - \tilde{f}\right)}{\partial}\right)\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \phi(x), \frac{\partial f}{\partial y} - \psi(y)\right)\\ &= (0,0)\end{aligned}$$

ולכן, $f - \tilde{f}$ קבועה. נסמן, $f - \tilde{f} = c$, וניקח:

$$g(x) = \tilde{g}(x)$$
$$h(y) = \tilde{h}(y) + c.$$

מתקיים: $f(x,y) = g(x) + h(y)$ וקיבלנו את הפירוק המבוקש.

2 פולינום טיילור

בדומה לפונקציות ממשתנה אחד, בתנאים מסויימים, ניתן לקרב את $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ על ידי פולינום ממעלה גבוהה מ n, ולאו דווקא על ידי פולינום ממעלה ראשונה (דיפרנציאל/נגזרת).

להלן הנוסחא והמשפט המתאימים. (עיין, בסוף הסיכום לצורך סימונים יותר נוחים והסבר - חלק מהקבוצות לא עשו את זה בהרצאה).

הגדרה 1.2. תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ו $f:A\to\mathbb{R}$, כך ש $f\in\mathcal{C}^m(A)$. פולינום טיילור של f מסדר m סביב a מוגדר על ידי

$$P_m(f,a)(v)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}(a)\frac{v_1^{k_1}}{k_1!}\cdots\frac{v_n^{k_n}}{k_n!}.$$

הערה 2.2. לעיתים קרובות מסמנים $v=x-a$. פולינום טיילור של f סביב $(0,0)$ נקרא פולינום מקלורן.

דוגמה 3.2. תהי $f(x,y)=\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$. אזי פולינום טיילור של f מסדר 2 של f סביב $(1,0)$ נתון על ידי:

$$\begin{gathered}P_2(f,(0,1))(v,u)=\\ f(1,0)+\frac{1}{1!}f_x(1,0)v+\frac{1}{1!}f_y(1,0)u+\frac{1}{2!}f_{xx}(1,0)v^2+\frac{1}{1!1!}f_{xy}(1,0)vu+\frac{1}{2!}f_y(1,0)u^2.\end{gathered}$$

נחשב:

$$\begin{aligned}f_x&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ f_y&=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ f_{xx}&=\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ f_{xy}&=-\frac{xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\\ f_{yy}&=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

נציב $(x,y)=(1,0)$ ונציב בפולינום שקיבלנו:

$$P_2(f,(0,1))(v,u)=1+v+u^2.$$

הגדרה 4.2. אם $P_m(f,a)$ הוא פולינום טיילור של f מסדר m סביב a, שארית מסדר m מוגדרת על ידי

$$R_m(f,a)=f(x)-P_m(f,a)(x-a)$$

או באופן שקול:

$$.R_m(f,a)(v) = f(a+v) - P_m(f,a)(v)$$

הגדרה 5.2. נאמר ש $f = o(g)$ אם קיים $\varepsilon > 0$ כך שאם $|g(t)| < \varepsilon$ אזי $|f(t)| \leq |g(t)|$ ואם $\lim_{t\to a} g(t) = 0$, אזי מתקיים:

$$.\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| = 0$$

הערה 6.2. אם f ו g רציפות ב 0, ניתן להסתפק בתנאי של הגבול בלבד. כמו כן, $o(g)$ היא למעשה קבוצה של פונקציות, והסימון הנכון הוא למעשה $f \in o(g)$. למרות זאת נוהגים להשתמש בסימן של $=$ ולא $\in$. משמעות האינטואיטיבית, הוא ש f זניח ביחס ל g. לאוהבי אנליזה לא סטנדרטית בינכם, זה אומר ש $0 \approx \frac{f(0)}{g(0)}$.

צורת רישום 7.2. נרשום $f(a+v) = g(a+v) + o(v)$ אם $f(a+v) - g(a+v) \in o(v)$.

משפט 8.2. אם $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו $f : A \to \mathbb{R}$ ו $f \in \mathcal{C}^{m+1}(A)$, והקטע המחבר את a ואת x מוכל כולו ב A, אזי

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{k_1+\dots\dots k_n} & \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}(a)\frac{(x_1-a_1)^{k_1}}{k_1!}\dots\frac{(x_n-k_n)^{k_n}}{k_n!} \\ + \sum_{m_1+\dots m_{n=m+1}} & \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}}(a+\theta(x-a))\frac{(x_1-a_1)^{k_1}}{k_1!}\dots\frac{(x_n-k_n)^{k_n}}{k_n!} \end{aligned}$$

עבור $0 < \theta < 1$ או באופן שקול:

$$\begin{aligned} f(v) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{k_1+\dots\dots k_n} & \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}(a)\frac{v^{k_1}}{k_1!}\dots\frac{v^{k_n}}{k_n!} \\ + \sum_{m_1+\dots m_{n=m+1}} & \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}}(a+\theta v)\frac{v^{k_1}}{k_1!}\dots\frac{v^{k_n}}{k_n!} \end{aligned}$$

עבור $0 < \theta < 1$. במונחים של שארית, המשפט אומר ש

$$.R_m(f,a)(v) = \sum_{m_1+\dots m_{n=m+1}} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}}(a+\theta v)\frac{v^{k_1}}{k_1!}\dots\frac{v^{k_n}}{k_n!}$$

הערה. נשים לב, שאם $j < i$ אזי ו $j_1 + \dots + j_n = j$, אזי

$$v_1^{j_1}\dots v_n^{j_n} = o\left(\|v\|^i\right)$$

על ידי שימוש סנדוויץ':

$$\lim_{v\to 0}\left|\frac{v_1^{j_1}\dots v_n^{j_n}}{\|v\|^i}\right| = \lim_{v\to 0}\|v\|^{j-i}\left|\frac{v_1^{j_1}\dots v_n^{j_n}}{\|v\|^{j_1}\dots\|v\|^{j_n}}\right|$$
$$= \lim_{v\to 0}\|v\|^{j-i}\left(\frac{|v_1|}{\sqrt{v_1^2+\dots+v_n^2}}\right)^{j_1}\dots\left(\frac{|v_n|}{\sqrt{v_1^2+\dots+v_n^2}}\right)^{j_n}$$
$$\leq \lim_{v\to 0}\|v\|^{j-i} = 0.$$

מכיוון שכל הגורמים בשארית הם $o\left(\|v\|^m\right)$, מתקיים:

$$R_m(f,a)(v) = o\left(\|v\|^m\right).$$

משפט 9.2. אם $f\in\mathcal{C}^m(A)$ אז $f(a+v) = P_m(f,a)(v) + o\left(\|v\|^m\right)$.

בדומה למקרה החד-מימדי, פולינום טיילור הוא יחיד שמקיים את התכונה האחרונה.

משפט 10.2. (יחידות פיתוח טיילור). אם $f\in C^m(A)$ ו Q הוא פולינום ממעלה m כך שמתקיים:

$$f(a+v) = Q(v) + o\left(\|v\|^m\right)$$

אזי $Q = P_m(f,a)$, זאת אומרת, Q הוא פולינום טיילור של f מסדר m. .

3 חישוב וישושים של פולינום טיילור

פולינום טיילור תמיד ניתן לחשב בעזרת הנוסחא מתחילת הסעיף הקודם. יחד עם זאת, לעיתים, ניתן לקצר את החישובים על ידי שימוש בפונקציות ידועות. השיטה היא להשתמש בפיתוח קיים, ואז להפתר מגורמים זניחים.

האבחנה הבאה שימושית מאד ונשתמש בה לעיתים קרובות בהמשך:

עובדה 1.3. נשים לב שמתקיים:

1. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו $f(t) = o\left(t^k\right)$, ו $f(0)=0$ (והשאריות של פולינום טיילור תמיד מתאפסות ב 0), אזי $f\left(x_i^k\right) = o\left(\|x\|^k\right)$.

הוכחה. מכיוון ש

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x_i)}{\|x\|^k}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x_i)}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}^k}\right|$$
$$= \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x_i)}{x_i^k}\right|$$
$$= \lim_{x_i\to 0}\left|\frac{f(x_i)}{x_i^k}\right| = 0.$$

□

2. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו $f(0)=0$, ו $f=o\left(t^{k}\right)$ ו $t=x_{1}^{m_{1}}\dots x_{n}^{m_{n}}$ כך ש $m_{1}+\dots+m_{n}=m$, אזי

$$f\left(x_{1}^{m_{1}}\dots x_{n}^{m_{n}}\right)=o\left(\|x\|^{mk}\right).$$

הוכחה. באותו אופן כמו הסעיף הקודם, אחרי ששמים לב ש $|x_i|\le\sqrt{x_{1}^{2}+\dots+x_{n}^{2}}$ לכל $1\le i\le n$. □

3. אם $k<m$ ו$x_{1}^{m_{1}}\dots x_{n}^{m_{n}}$ כך ש $m_{1}+\dots+m_{n}=m$, אזי $x_{1}^{m_{1}}\dots x_{n}^{m_{n}}=o\left(\|x\|^{k}\right)$.

4. אם $f=o\left(\|x\|^{k}\right)$, אזי לכל פונקציה חסומה g מתקיים $gf=o\left(\|x\|^{k}\right)$.

5. אם $f,g=o\left(\|x\|^{k}\right)$, אזי גם $f+g=o\left(\|x\|^{k}\right)$.

6. אם $a\|x\|^{k}\le|g(x)|\le b\|x\|^{k}$ עבור $0<a,b$, אזי $f=o\left(\|x\|^{k}\right)$ אם ורק אם $f=o(g(x))$.

7. אם $f(x)=o\left(\|x\|^{k}\right)$, ו $m\le k$, אזי $f(x)=o\left(\|x\|^{m}\right)$.

הוכחה. באותו אופן כמו שני סעיפים הראושונים, בעזרת שימוש בסנדביץ'. □

תרגיל 2.3. מצאו פולינום טיילור של $f(x,y)=\cos x+\sin y$ מסדר 4 סביב הנקודה $(0,0)$.

פתרון. פילינומי טיילור של $\cos x$ ו $\sin y$ ידועים. לכן נוכל להשתמש בפיתוח פאנו ונקבל:

$$\cos x+\sin y=\left(1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+o\left(x^{4}\right)\right)+\left(y-\frac{y^{3}}{3!}+o\left(y^{4}\right)\right).$$

על פי העובדה בתחילת החלק הנוכחי, $o\left(x^{4}\right)+o\left(y^{4}\right)=o\left(\|(x,y)\|^{4}\right)$ ולכן

$$f(x,y)=1+y-\frac{x^{2}}{2!}-\frac{y^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+o\left(\|(x,y)\|^{4}\right)$$

והתוצאה נובעת מיחידות של פיתוח טיילור.

באופו דומה, ניתן לחשב פולינום טיילור של מכפלה.

תרגיל 3.3. מצאו פולינום טיילור של $f(x,y)=e^{x}\cos y$ סביב $(0,0,0)$ מסדר 3.

פתרון. שוב, נשתמש בפיתוחים ידועים. ניקח פיתוחים של e^{x} ו $\cos y$ עד סדר 3 (חייבים עד סדר 3 על מנת לא לעבד גורמים).

נקבל:

$$\begin{aligned} f(x,y)=e^x\cos y &= \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)\left(1-\frac{y^2}{2!}+o\left(y^3\right)\right)\\ &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\\ &-\frac{y}{2!}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)\\ &+o\left(y^3\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)\end{aligned}$$

על פי העובדה בתחילת החלק 3, כל $o\left(y^3\right), o\left(x^3\right)$ הם $o\left(\|(x,y)\|^3\right)$ וכל ביטוי מחזקה גבוה מ 3 הוא גם $o\left(\|(x,y)\|^3\right)$, כל הגורמים פרט למונומים מחזקה קטנה או שווה ל 3 הם $o\left(\|(x,y)\|^3\right)$. ולכן:

$$\begin{aligned} e^x\cos y &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{y}{2!}-\frac{xy}{2!}-\frac{yx^2}{2!2!}\\ &\underbrace{-\frac{yx^3}{2!3!}+o\left(x^3\right)\left(1-\frac{y}{2!}\right)+o\left(y^3\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)}_{=o\left(\|(x,y)\|^3\right)}\\ &=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{y}{2!}-\frac{xy}{2!}-\frac{yx^2}{2!2!}+o\left(\|(x,y)\|^3\right)\end{aligned}$$

במקרה של הרכבה העסק הוא טריקי. השיטה עובדת, אלא צריך לדרוש שאם עושים פיתוח של $g(f(x))$ סביב a, צריך לדרוש ש $f(a)=0$. נביא דוגמה:

דוגמה 4.3. אם ננסה לפתח e^{1+x} סביב 0 על ידי הצבה בפולינום, של e^t מסדר סופי, נקבל:

$$.e^{1+x}=1+(1+x)+\frac{(1+x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(1+x)^n}{n!}+o\left((1+x)^n\right)$$

אבל $o\left((1+x)^n\right)$ הוא לא בהכרח $o\left(x^m\right)$.

דוגמה 5.3. פתחו את $e^{x\sin y}$ מסדר 4 סביב 0.

פתרון. תחילה נציב את $x\sin y$ בפולינום טיילור של e^tעד סדר 4.

$$.e^{x\sin y}=\sum_{n=0}^{4}\frac{(x\sin y)^n}{n!}+o\left((x\sin y)^4\right)$$

עכשיו, נשים לב ש $|x\sin y|\le|xy|$ ולכן $o\left(|x\sin y|^4\right)=o\left(|xy|^4\right)$. מצד שני $o\left(|xy|^4\right)=o\left(\|(x,y)\|^4\right)$

$$.e^{x\sin y}=\sum_{n=0}^{4}\frac{(x\sin y)^n}{n!}+o\left((x\sin y)^4\right)=\sum_{n=0}^{4}\frac{(x\sin y)^n}{n!}+o\left(\|(x,y)\|^4\right)$$

עכשיו נפתח את $x\sin y$ בעזרת מכפלה. נקבל

$$.x\sin y=x\left(y-\frac{y^3}{3!}+o\left(y^4\right)\right)$$

נציב בפיתוח ונקבל:

$$e^{x\sin y}=\sum_{n=0}^{4}\frac{\left(x\left(y-\frac{y^3}{3!}+o\left(y^4\right)\right)\right)^n}{n!}+o\left(\|(x,y)\|^4\right)$$

עכשיו, נשים שלאחר פתיחת סוגריים, הגורמים שמתקבלים מ $x\left(y-\frac{y^3}{3!}+o\left(y^3\right)\right)^m$, עבור $m>2$ הם ממעלה גבוה מ 4 או מהצורה $\left(xo\left(y^4\right)\right)^k$ולכן גם $o\left(\|(x,y)\|^4\right)$. למשל,

$$.\left(xy\right)^2,\left(xo\left(y^3\right)\right)^3=o\left(\|(x,y)\|^3\right)$$

והגורם היחיד שמקבלים מ $\frac{\left(x\left(y-\frac{y^3}{3!}+o\left(y^4\right)\right)\right)^2}{2}$ שלא $o\left(\|(x,y)\|^4\right)$ הוא $\frac{x^2y^2}{2}$. לכן, לארח פתיחת סודריים וכינוס הגורמים נקבל:

$$.e^{x\sin y}=1+xy-\frac{xy^3}{3!}+\frac{x^2y^2}{2!}+o\left(\|(x,y)\|^4\right)$$

לעיתים, ניתן לעקוף את הבעיה על ידי הצבת $f(x)-f(a)$ במקום הפקונצה המקורית ב $g\left(f(a)+t\right)$ כאשר ההזזה הנ"ל היא פשוטה יחסית.

תרגיל 6.3. חשבו את הפולינום טיילור של $e^{\cos(xy)}$ סביב $(0,0)$, עד סדר 4.

פתרון. נשים לב ש $\cos(xy)$ אינה מתאפסת ב $(0,0)$ ולכן אי אפשר להשתמש בהרכבה ישירות. תחילה, נשים לב ש $\cos 0\cdot 0=1$ ונרשום:

$$.e^{\cos(xy)}=e^{\cos xy-1+1}=e\cdot e^{\cos xy-1}$$

עכשיו $\cos xy-1$ מתאפסת ב $(0,0)$. נחשב את $e^{\cos xy-1}$ בעזרת הרכבה ונכפיל את התוצאה ב e. נקבל:

$$.\cos xy-1=-\frac{x^2y^2}{2}+o\left(x^2y^2\right)$$

נציב בפולינום של e ונקבל:

$$e^{\cos xy-1}=1+\left(-\frac{x^2y^2}{2}+o\left(x^2y^2\right)\right)+o\left(\left(-\frac{x^2y^2}{2}+o\left(x^2y^2\right)\right)\right)$$

עכשיו, נשים לב ש

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-\frac{x^2y^2}{2}+o\left(x^2y^2\right)}{\|(x,y)\|^4}\leq 1$$

ולכן אם $f = o\left(\left(-\frac{x^2y^2}{2} + o\left(x^2y^2\right)\right)\right)$ אזי $f = o\left(\|(x,y)\|^4\right)$. באותו אופן $o\left(x^2y^2\right) =$ $o\left(\left\|(x,y)^4\right\|\right)$ וקיבלנו:

$$
\begin{aligned}
e^{\cos xy - 1} &= 1 + \left(-\frac{x^2y^2}{2} + o\left(x^2y^2\right)\right) + o\left(\left(-\frac{x^2y^2}{2} + o\left(x^2y^2\right)\right)\right) \\
&= 1 - \frac{x^2y^2}{2} + o\left(\|(x,y)\|^4\right)
\end{aligned}
$$

ושוב, על פי יחידות פולינום טיילור $1 - \frac{x^2y^2}{2}$ הוא הפולינום טיילור של $e^{\cos xy - 1}$ מדרגה 4 סביב $(0,0)$. נכפיל ב e ונקבל ש

$$
.e^{\cos xy} = e - e\frac{x^2y^2}{2} + o\left(\|(x,y)\|^4\right)
$$

1.3 חישוב פולינום טיילור של פולינום.

ממשפט היחידות, פולינום טיילור של פונקציה פולינומיאלית היא הפונקציה בעצמה.

כמה נקודות שיש לשים לב אליהן:

אם פולינום הוא ממעלה m, ומבקשים פולינום טיילור ממעלה $k < m$, אז צריך פשוט לקחת את הגורמים עד מעלה k.

אם מבקשים סביב נקודה אחרת, צריך לעשות הזזה.

דוגמה 7.3. מצאו פיתוח טיילור של $x^3 + y^2x$ סביב הנקודה $(1,2)$ מסדר 2.

פתרון. נשים לב לשוויון: $x = (x-1)+1, y = (y-2)+2$. נציב ונקבל:

$$
\begin{aligned}
x^3 + y^2x &= ((x-1)+1)^3 + ((y-2)+2)^2((x-1)+1) \\
&= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 + \left((y-2)^2 + 4(y-2) + 4\right)((x-1)+1) \\
&= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 \\
&+ (y-2)^2(x-1) + 4(y-2)(x-1) + 4(x-1) \\
&+ (y-2)^2 + 4(y-2) + 1 \\
&= (x-1)^3 + (y-2)^2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(y-2)(x-1) \\
&+ (y-2)^2 + 7(x-1) + 4(y-2) + 2
\end{aligned}
$$

מכיוון שביקשו את הפיתוח עד סדר 2, ניקח את הגורמים מחזקה 2 או פחות ונקבל:

$$
.x^3 + y^2x = 3(x-1)^2 + 4(y-2)(x-1) + (y-2)^2 + 7(x-1) + 4(y-2) + 2 + o\left(\|(x-1, y-2)\|^2\right)
$$

2.3 חישוב נגזרות מעורבות בעזרת פולינום טיילור.

תרגיל 8.3. מנוסחת טיילור, ידוע לנו שהמקדם של $v_1^{k_1}\dots v_n^{k_n}$ בפולינום טיילור סביב a הוא

$$.\frac{1}{k_1!}\cdots\frac{1}{k_n!}\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}$$

לכן, אם במקרים שבהם ניתן לחשב את פולינום טיילור מהר, ניתן לחשב את הנגזרת המעורבת על ידי חילוץ המקדם המתאים מפולינום טיילור והכפה ב $k_1!\dots k_n!$.

דוגמה 9.3. חשבו את

$$.\frac{\partial^{20}\cos\left(xy^2z\right)}{\partial x^2\partial y^{15}\partial z^3}(0,0,0)$$

לגזור, 20 פעמים זה תהליך דיי מייגע. מצד שני, פיתוח טיילור סביב $(0,0,0)$ נותן לנו:

$$.\cos\left(xy^2z\right)=1-\frac{xy^2z}{2!}+\frac{\left(xy^2z\right)^4}{4!}-\frac{\left(xy^2z\right)^6}{6!}+o\left(xy^2z\right)$$

פיתוח טיילור לא מכיל גורמים מסדר 20, ולכן

$$.\frac{\partial^{20}\cos\left(xy^2z\right)}{\partial x^2\partial y^{15}\partial z^3}(0,0,0)=0$$

4 משפט הפונקציה ההפוכה ומשפט הפונקציה הסתומה

עשינו דוגמאות מחוברת של אלעד. הדוגמאות שעשינו נמצאות בפקר 7 בין עמודים 157 ו 167. כמו כן נמצאות שם דוגמאות נוספות.