# חלוקה משרה יחס שקילות

31 בינואר 2017

בשיעור ראינו:

1. אם $R$ יחס שקילות מעל קבוצה $A$ אז קבוצת המנה $A/R$ היא חלוקה של $A$
2. אם $\mathcal{F}$ היא חלוקה של קבוצה $A$ אז היחס המוגדר כך

$$a_1Ra_2 \equiv \exists S \in \mathcal{F}.\, a_1 \in S \wedge a_2 \in S$$

הוא יחס שקילות מעל $A$

**תרגיל:** הוכיחו כי במקרה השני $A/R = \mathcal{F}$
**תזכורת:** במהלך ההוכחה נשתמש בטענה: אם $R$ יחס שקילות אז $x \in [x]$.
**הוכחה:** נדרש להוכיח שיוויון בין קבוצות, לכן נראה הכלה הדדית.

- נניח ש $[x] \in A/R$ ונראה ש $[x] \in \mathcal{F}$. מהטענה, $x \in [x]$ ולכן $xRx$ ובפרט יש ב $\mathcal{F}$ $S$ כך ש $x \in S$. נראה ש $[x] = S$ ונסיים. גם כאן נראה הכלה הדדית

$$y \in [x] \equiv xRy \equiv \exists S_0 \in \mathcal{F}.\, x \in S_0 \wedge y \in S_0$$

ומכיוון ש $\mathcal{F}$ חלוקה ו $x$ שייך גם ל $S$ וגם ל $S_0$ אז הן שוות. מנגד, אם $y \in S$ אז $xRy$ לפי הגדרת $R$ ולכן $y \in [x]$.

- כעת נניח ש $S \in \mathcal{F}$ ונראה שיש $x \in A$ כך ש $S = [x]$. הקבוצה $S$ החא איבר בחלוקה ולכן לא ריקה. נסמן ב $x$ איבר כלשהו ב $S$. נותר להראות ש $S = [x]$, אך הוכחה זו זהה להוכחה המקבילה בחלק הראשון.