27.12.15

תורת הקבוצות

תרגול 8

עוצמה

בהגדרה אמרנו ששתי קבוצות הן שוות עוצמה $\Leftrightarrow$ יש $f: X\to Y$ חח"ע ועל.

ואמרנו $|X|\le|Y| \Leftrightarrow$ יש $f:X\to Y$ חח"ע ~~[illegible]~~

$|X|<|Y| \Leftrightarrow$ יש $f:X\to Y$ חח"ע אבל אין $g:X\to Y$ חח"ע ועל.

מונה

הגדרה: סודר α ייקרא מונה אם לכל $\beta<\alpha$ אין פונקציה על $\alpha\to\beta$.

תרגיל: חיבור/כפל: α, β מונים $\Rightarrow$? $\alpha\cdot\beta$ מונה.

פתרון: $\alpha=\omega$, $\beta=2$, ω מונה, 2 מונה

אבל $\omega\cdot 2=\omega+\omega$ לא מונה כי $\omega<\omega+\omega$ אבל יש $f:\omega\to\omega\cdot 2$ על!

$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{זוגי}\\ \omega+\frac{n-1}{2} & \text{אי זוגי}\end{cases}$ קל לבדוק ש-f על.

לכן $\omega\cdot 2$ לא מונה.

טענה: יהי α סודר כלשהו. הוכח $cof(\alpha)$ תמיד מונה.

הוכחה: α עוקב $\Rightarrow cof(\alpha)=1$ ולכן מונה.

~~[illegible]~~ α גבולי. נניח בשלילה שיש α כך ש-

$cof(\alpha)$ אינו מונה ולכן יש $\beta\in cof(\alpha)$ כך שיש

$h:\beta\to cof(\alpha)$ פונקציה על. (בפרט קופי').

נניח $g: cof\,\alpha\to\alpha$ היא פונקציה קופינאלית

ונסתכל על $g\circ f:\beta\to\alpha$ ~~[illegible]~~ קופינאלית.

כי $Im\, g\circ f = Im\, g$ כי f על.

בסתירה למינימאליות בהגדרת $cof\,\alpha$.

הגדרה: תהי A קבוצה. נגדיר את $|A|$ כמו הסודר המינימאלי

כך שיש $f:A\to|A|$ חח"ע ועל.

הערה: מעקרון הסדר הטוב לכל A קיים סודר α כך
שיש $f:A\to\alpha$ חח"ע ועל.
לכן קבוצת הסודרים α שיש להם $f:A\to\alpha$ חח"ע
זו לא ריקה ולכן יש לה איבר ראשון.
ראינו בהבחנה שהעוצמה של קבוצה הוא סודר מונה.

הגדרה: יהיו κ_1,κ_2 מונים.

$$\kappa_1\odot\kappa_2=|\kappa_1\times\kappa_2| \quad , \quad \kappa_1\oplus\kappa_2=|\kappa_1+\kappa_2|$$

טענה: חיבור של מונים שונה מחיבור של סודרים. (וכן לכפל).

דוגמא: $\kappa_1=\omega$, $\kappa_2=1$, $\kappa_1+\kappa_2=\omega+1$

$$\kappa_1\oplus\kappa_2=\omega\oplus 1=|\omega+1|=\omega<\omega+1 .$$

טענה: לכל κ_1,κ_2 מונים, כך שלפחות אחד אינסופי.

$$\kappa_1\oplus\kappa_2=\kappa_1\odot\kappa_2=\max\{\kappa_1,\kappa_2\}$$

הגדרה: עבור מונה κ, κ^+ המונה הראשון שגדול מ-κ.

תרגיל: לכל $\kappa\geq\omega$ מונה $\kappa^+=|\{\gamma : |\gamma|=\kappa\}|$

פתרון: אם $|\gamma|\geq\kappa$ אז בהכרח $\kappa\leq\gamma$, כי κ מונה.
ולכן $\kappa\leq|\gamma|\leq\gamma$.
אם $|\gamma|<\kappa^+$ אז בהכרח $\gamma<\kappa^+$ אחרת $\gamma\geq\kappa^+$
ולכן $|\gamma|\geq\kappa^+$, גם כי κ^+ מונה.
לכן $\{\gamma / |\gamma|=\kappa\}=\{\gamma / \kappa\leq|\gamma|<\kappa^+\}$
נותר לחשב את העוצמה של הקבוצה הזו.

$$\kappa^+=\{\gamma / \gamma<\kappa^+\}=\{\gamma / \gamma<\kappa\}\uplus\{\gamma / \kappa\leq|\gamma|<\kappa^+\}$$

עוצמת סכום זר של קבוצות יוצא המקסימום.
מתקיים $\{\gamma / \gamma<\kappa\}=\kappa$. ולכן כיוון ש-

$$\max\{\kappa, |\{\gamma / \kappa\leq|\gamma|<\kappa^+\}|\}=\kappa^+$$

נקבל בהכרח $\kappa^+=|\{\gamma / \kappa\leq|\gamma|<\kappa^+\}|=|\{\gamma / |\gamma|=\kappa\}|$
כנדרש! מש"ל!

תרגיל: הוכח ש- CARD אינו קבוצה.

פתרון: נניח בשלילה ש- CARD קבוצה.

ולכן $\bigcup CARD$ גם קבוצה ונראה ש- $\bigcup(CARD) = On$.

ברור כי $\bigcup CARD \subseteq On$. נראה את הכיוון השני.

(כי כל מונה הוא סודר. וכל איבר באיבר הוא סודר...)

ונראה שכל סודר שייך לאיזשהו מונה. יהיה $\alpha \in On$ סודר.

נראה ש- $\alpha \in |\alpha|^+$ - שניהם סודרים ומספיק להראות $\alpha < |\alpha|^+$

(ברור כי אחרת $|\alpha|^+ \le \alpha$ ואז יש שיכון $|\alpha|^+ \hookrightarrow \alpha$
אבל $|\alpha| = |\alpha|$ ולכן $\alpha \in |\alpha|^+$)

סה"כ $On = \bigcup CARD$ ולכן On קבוצה בסתירה!
מ.ש.ל!

האלפים של קנטור

הגדרה: (ברקורסיה) $\aleph_0 = \omega$ $\quad \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$ $\quad \aleph_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$

טענה: ① $\aleph_\alpha$ מונה לכל α.

טענה: ② לכל מונה k אינסופי יש α כך ש: $k = \aleph_\alpha$.

טענה: ③ אם $\alpha < \beta$ אז $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

טענה: ④ $\alpha \le \aleph_\alpha$. (נובע מ-③).

הגדרה: $cof(A,<) = \min\{|D| \,/\, \underset{\text{קופי'}}{D \subseteq A}\}$

טענה: יהיה α מונה. $cof(\alpha)$ כמונה וסודר.

הגדרה: $cof\,\alpha$ כסודר זה ה- β המינימלי כך ש- $f:\beta \to \alpha$ קופי'.

הקופינליות כמונה זה העוצמה (מונה) מינימלית k קבוצה קופי' ב- α.

(סודר → מונה). נניח $cof\,\alpha = \beta$ (סודר). ונראה ש- β מונה.

(מונה → סודר) נראה ש- $\min\{|D| \,/\, \underset{\text{קופי}}{D \subseteq A}\} = \beta$. ונסמן את זה

ויהי ב- D. נסמן $k = |D|$. ונראה

$k = \beta$. ויש $f:\beta \to \alpha$ קופי' ושומרת סדר

f שומרת סדר ולכן ממ"ע $|f(\beta)|=|\beta|\leq|\alpha|$

$f(\beta)\subseteq\alpha$ קופינאלית.. סה"כ $\beta\leq\kappa$. β, כי מונה.

מצד שני יש $D\subseteq A$ קופי' מעוצמה κ. ונבנה

$f:\kappa\to\alpha$ ע"י $f:D\to\kappa$ חח"ע ועל במצב כי $|D|=\kappa$.

f קופינאלית ב-α (כי D קופי') ולכן $\beta\leq\kappa$

סה"כ $\kappa=\beta$ כנדרש!

מש"ל!

הגדרה: מונה κ ייקרא סדיר $\iff$ $\kappa=cof(\kappa)$

אחרת κ ייקרא חריג.

טענה: לכל $\omega<\delta$ סודר יש מונה חריג גדול מ-δ.

הוכחה: $\kappa_0=|\delta|$ $\kappa_n=\kappa_{n-1}^+$ $\kappa=\sup\{\kappa_n\}$.

κ הוא מונה כסופרימום של קבוצה של מונים.

$cof(\kappa)\leq\omega$ לא יכול להיות $cof(\kappa)<\omega$ כי κ

מונה אינסופי ותמיד גבולי וכמו שכבר ראינו, לסודר

קופינאליות תמיד גבולי שווה ל-ω $\Rightarrow$ $cof(\kappa)=\omega$.

כמובן ש-$\omega<\kappa$. כי $\omega\leq|\delta|\leq\delta<\kappa$.

בנוסף כי $\kappa>|\delta|^+$ $\Rightarrow$ $\kappa>|\delta|^+>\delta\geq\omega$. מש"ל!

טענה: κ סודר. אז:

א. לכל $A\subseteq\kappa$ רק ש-$|A|<\kappa$, A חסומה ב-κ.

ב. לכל $\delta<\kappa$ (סודר) יש $f:\delta\to\kappa$ אז $Im f$ חסומה.

הוכחה: א. נניח בשלילה ש-A לא חסומה. לכן A קופי' ב-κ.

אבל $cof(\kappa)=\kappa$ כי סדיר. לכן $cof(\kappa)\leq A$ בסתירה!

ב. $Im f\subseteq\kappa$, וכן $|Im f|\leq|\delta|$, $|\delta|\leq\delta<\kappa$.

סה"כ $|Im f|<\kappa$ ומ-א נקבל ש-$Im f$ חסומה ב-κ כנדרש!

מש"ל!

תרגיל: (מתבחן).

K מונה אינסופי ! α - סודר המקיים $0 < \alpha < K$.

הוכח כי קיים סודר β כך ש- $|\beta| = K$ ו- $cof(\beta) = cof(\alpha)$.

פתרון: ניקח $\beta = K+\alpha$. ($|\alpha| < K$ כי K מונה.)

⊛ $|\beta| = |K+\alpha| = K \oplus |\alpha| = \max\{K, |\alpha|\} = K$.

⊛ נראה ש- $cof(\beta) = cof(\alpha)$. (נוכיח יותר כללי).

טענה: לכל α, β סודרים $cof(\alpha+\beta) = cof(\beta)$

הוכחה: נסמן $\gamma = cof(\beta)$ ויש $f: \gamma \to \beta$ קופי' (ושומרת סדר).

ונבנה $g: \gamma \to \alpha+\beta$ ע"י $g(\delta) = \alpha + f(\delta)$.

ברור שהתמונה של g קופי' ב- $\alpha+\beta$

ולכן $cof(\alpha+\beta) \leq cof(\beta)$.

בכיוון שני. נבנה $h: \alpha+\beta \to \beta$ קופי'.

ע"י
$$h(\gamma) = \begin{cases} 0 & \gamma < \alpha \\ \delta & \gamma = \alpha+\delta \quad \delta < \beta \end{cases}$$
קיים כזה!

נראה על ובפרט קופי'.

יש $\tilde{h}: cof(\alpha+\beta) \to \alpha+\beta$ קופי'

ו- $h \circ \tilde{h}: cof(\alpha+\beta) \to \beta$ קופי' (כי h על!)

עבור $cof(\alpha+\beta) \geq cof(\beta)$ סה"כ שוויון! כדרוש!

מ.ש.ל!

תרגיל: (מתבחן).

K, λ סודרים אינסופיים. חשבו $cof(K \cdot \lambda)$ (חשבון סודרים.)

פתרון: נוכיח טענה כללית יותר!

טענה: לכל זוג אורדינלים α, β - $cof(\alpha\cdot\beta)=cof(\beta)$. כאשר β גבולי

הוכחה: נסמן $\gamma = cof(\beta)$

נראה תחילה $\gamma \le cof(\alpha\times\beta)$.

יש $p: \alpha\times\beta\to\beta$ על ע"י הטלה.

יש קופי שומרת סדר $h: cof(\alpha\times\beta)\to\alpha\times\beta$

נרכיב ונקבל $p\circ h: cof(\alpha\times\beta)\to\beta$ קופי (כי h על!)

לצד שני נראה $cof(\alpha\times\beta)\le\gamma$.

יש $h^{\sim}: cof(\beta)\to\beta$ קופי. ונבנה פונקציה לתוך $\alpha\times\beta$

ע"י $f: cof(\beta)\to\alpha\times\beta$ $f(\xi)=(0,h^{\sim}(\xi))$.

כיוון ש- β גבולי f תהיה קופי.

ויהיה $(x,y)\in(\alpha,\beta)$. אז $(x,y+1)\in\beta$ כי β גבולי.

$(x,y)<(0,y+1)$. יש δ כך ש- $h^{\sim}(\delta)\ge y+1$

ואז $f(\delta)>(x,y)$ כדרוש!

מ.ש.ל!

פה צריך β גבולי. מסדר לאין וכלל להשיג $(x,y)\le(0,y)$ כי בקואורד' דורשים רק שווה אבל בגלל היחס מילוני מימין גבול ממש.

וזה לגבי מיונים. β גבולי!