תירגול 7

9 ביולי 2013

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $W \subset V$ תת מרחב מאותו מימד
$(dim_{\mathbb{F}}V = dim_{\mathbb{F}}W = n)$. הוכח: $W = V$.
הוכחה: נבחר $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ בסיס ל W. בפרט $span(B) = W$
ו Bקבוצה בת"ל. כיוון ש Bעם n איברים אזי לפי השלישי חינם $span(B) = V$.■
תרגיל: היה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $B = \{v_1, \dots v_n\}$ בסיס.
אזי כל וקטור $v \in V$. ניתן להצגה יחידה באיברי בסיס B.
פתרון: כיוון ש $span(B) = V$ ניתן לכתוב $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ נניח כי ניתן להציג את v גם
כ $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ אזי $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ כלומר $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$
כיוון ש B בת"ל לכל i $\alpha_i - \beta_i = 0$ כלומר לכל i $\alpha_i = \beta_i$ ■
הגדרה יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $A, B \subset V$. אזי $A+B := \{a+b \,|\, a \in A, b \in B\}$
תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $A, B \subset V$.
הוכח $span(A \cup B) = span(A) + span(B)$
הוכחה: $(\supseteq)$ יהא $x \in span(A) + span(B)$ אזי $x = x_A + x_B$
כאשר $x_A \in span(A), x_B \in span(B)$.
לפי הגדרה $x_B = \sum_{i=1}^{s} \beta_i b_i$, $x_A = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i$ כאשר α_i, β_i סקלארים ו $a_i \in A, b_i \in B$.
לכן $x = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i b_i$ כלומר צ"ל של איברים מ $A \cup B$ ולכן $x \in span(A \cup B)$.
$(\subseteq)$יהא $x \in span(A \cup B)$ אזי $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ כאשר $v_i \in A \cup B$. כלומר
לכל i מתקיים $v_i \in A$ או $v_i \in B$
נסדר ע"י החלפת אינדקסים את כל $v_i \in A$בהתחלה (נניח $1 \le i \le l$)
ואת כל ה $v_i \in B$ בסוף (נניח $l + 1 \le i \le n$)
ואז $x = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i v_i + \sum_{i=l+1}^{n} \alpha_i v_i \in span(A) + span(B)$.■

4 המרחביים היסודיים של מטריצה

תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי 4 המרחבים היסודיים של A הם:

1. מרחב העמודות $C(A) := \{Ax \,|\, x \in \mathbb{F}^n\} = span\{C_1(A), \dots, C_n(\dot{A})\} \subset \mathbb{F}^m$
2. מרחב השורות $C(A^t) = R(A) := \{A^t x \,|\, x \in \mathbb{F}^m\} = span\{R_1(A), \dots, R_n(\dot{A})\} \subset \mathbb{F}^n$

3. מרחב האפס $N(A) := \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{F}^n$

4. מרחב האפס השמאלי $\begin{aligned} N(A^t) &:= \{x \in \mathbb{F}^m \mid A^t x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{F}^m \mid x^t A = 0\} \subset \mathbb{F}^m \end{aligned}$.

מרחב השורות

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ותהא $E \in \mathbb{F}^{m \times m}$ מטריצה הפיכה. נסמן $EA = U \in \mathbb{F}^{m \times n}$.
הוכח $R(A) = R(U)$.
הוכחה:
$(\supseteq)$ יהא $U^t x \in R(U)$ אזי $U^t x = A^t E^t x = A^t(E^t x) = A^t y \in R(A)$.
$(\subseteq)$ יהא $A^t x \in R(A)$ אזי
$A^t x = (E^{-1}U)^t x = (U^t(E^{-1})^t)x = U^t[(E^t)^{-1}x] = U^t y \in R(U)$. ■
מסקנה: בפרט אם E מכפלה של מטריצות אלמנטריות המעבירות את A לצורה מדורגת/קנונית.

תרגיל/דוגמא: תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ מצא את $R(A)$.

פתרון: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
כיוון שמרחב השורות של A שווה למרחב השורות לאחר דירוג נקבל ש

$$R(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} a \\ 2a+b \\ 3a \\ 4a+b \end{pmatrix}\}$$

מרחב העמודות

את מרחב העמודות ניתן למצוא כמו את מרחב השורות ע"י מעבר ל A^t. נראה עוד דרך:
תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ונניח שאחר דירוג העמודות $1, \cdots, l$ הן עמודות עם ציר. הוכח $\{C_1(A), \cdots C_l(A)\}$ בסיס למרחב העמודות.
פתרון: נסמן $EA = U$. כאשר U הצורה המדורגת של A ו $A = E'U$ כאשר $E^{-1} = E'$
בת"ל: נניח $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(A) = 0$ אבל $C_i(A) = E' C_i(U)$ ולכן
$0 = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i E' C_i(U)$ ע"י הכפלה בהופכית של E' נקבל $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(U) = 0$
ולכן $\alpha_i = 0$ לכל i כי עמודות עם ציר הן בת"ל.
פורשת: מ"ל שלכל $l < s \leq n$
מתקיים $C_s(A) \in span\{C_1(A), \cdots C_l(A)\}$. (לפי תרגיל מש.ב.)
ברור כי $C_s(U) \in span\{C_1(U), \cdots C_l(U)\}$
כי $\{C_1(U), \cdots C_l(U)\}$ העמודות עם ציר.
בנוסף $C_i(U) = EC_i(A)$ ולכן אם $C_s(U) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(U)$ אזי $EC_s(A) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i EC_i(A)$
ולכן ע"י הכפלה בהופכית נקבל $C_s(A) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(A)$.■
הערות:

1. התרגיל נכון גם אם עמודות הצירים הן אינן העמודות הראשונות דווקא.

2. מרחב העמודות של U אינו שווה למרחב העמודות של A.

דוגמא: מצא את מרחב העמודות של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

פתרון: אחרי דירוג קיבלנו $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן מרחב העמודות הוא

$span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$

($\neq span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ כי $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$)

משפט: $dim[R(A)] = dim[C(A)]$.

הגדרה: הדרגה של A מוגדרת להיות $rank(A) = dim[R(A)]$

הערה $rank(A) = dim[R(A)] = dim[C(A)]$= מספר השורות השונות מאפס לאחר דירוג= מספר עמודות הציר = מספר משתנים תלויים.

תרגיל: יהיו $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}$ מטריצות הוכח: $rank(AB) \leq rank(A), rank(B)$

הוכחה: ש"ל $dim[C(AB)] \leq dim[C(A)]$ יהיה $\{C_1(A), \ldots, C_l(A)\}$ בסיס למרחב העמודות.

בנוסף $C(AB) = span\{AC_1(B), \ldots, AC_p(B)\}$ כיוון שלכל i $AC_i(B)$ הוא צ"ל של עמודות A מקבלים ש

$C(AB) = span\{AC(B)_1, \ldots, AC(B)_p\} \subset span\{C_1(A), \ldots, C_l(A)\} = C(A)$ ולכן $dim[C(AB)] \leq dim[C(A)]$.

באופן דומה $dim[R(AB)] \leq dim[R(A)]$.

מסקנה: יהיו $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ו - B הפיכה אזי $rank(AB) = rank(A)$

הוכחה: $rank(A) = rank(ABB^{-1}) \leq rank(AB) \leq rank(A)$

מרחב האפס

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ותהא $E \in \mathbb{F}^{m\times m}$ מטריצה הפיכה. נסמן $EA = U \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

הוכח $N(A) = N(U)$.

פתרון: $(\supseteq)$ יהא $x \in N(U)$ אזי $Ux = 0$ לפי הגדרה ולכן $Ax = E^{-1}Ux = E^{-1}0 = 0$ ולכן $x \in N(A)$

$(\subseteq)$ יהא $x \in N(A)$ אזי $Ax = 0$ ולכן $Ux = EAx = E0 = 0$ ולכן $x \in N(U)$. ■

תרגיל: מצא את מרחב האפס של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

פתרון: אחרי דירוג קיבלנו $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן מרחב האפס הוא $(z = t, w = s)$

$$.\begin{pmatrix} -2s-3t \\ -s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = span\{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

מרחב האפס השמאלי

תרגיל: מצא מצא את מרחב האפס השמאלי של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

פתרון: צ"ל $N(A^t)$. נדרג את A^t

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עבור $z = t$ נקבל $N(A^t) = \{\begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix}\} = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

משפט: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. נסמן $rank(A) = dim(C(A)) = dim(R(A)) = r$ אזי
$dim(N(A)) + dim(C(A)) = n$ ו־ $dim(N(A^t)) + dim(R(A)) = m$
במילים אחרות $dim(N(A)) = n - r$ ו־ $dim(N(A^t)) = m - r$.
במקרה הפרטי ש $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נקבל תוצאה יותר חזקה:

משפט (בש.ב) : תהא $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ויהיו $B_R, B_C, B_N, B_{N(A^t)}$ בסיסים למרחב העמודות,שורות, האפס, האפס השמאלי בהתאמה.
אזי $B_R \cup B_N$ בסיס ל $\mathbb{R}^n$ ו ־ $B_C \cup B_{N(A^t)}$ בסיס ל $\mathbb{R}^m$.
בפרט: נסמן $dim(C(A)) = dim(R(A)) = r$

1. $dim(N(A)) = n - r$, $dim(N(A^t)) = m - r$ (כמו במשפט הכללי)
2. $B_R \cup B_N$ קבוצה בת"ל, $B_C \cup B_{N(A^t)}$ קבוצה בת"ל
3. כל $v \in \mathbb{R}^m$ ניתן להצגה יחידה כ־ $v = v_N + v_R$ כאשר $v_N \in N(A), v_R \in R(A)$
וכל $v \in \mathbb{R}^n$ ניתן להצגה יחידה כ־ $v = v_{N(A)} + v_C$ כאשר $v_{N(A^t)} \in N(A^t), v_C \in C(A)$
(לפי התרגיל $dim\, C(A) + dim\, R(A) = dim\, V$ שהוכחנו שכל וקטור יש לו הצגה יחידה כצ"ל של איברי בסיס)

לדוגמא עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. מצאנו כי

$$B_R = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\},\ B_C = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

$$B_N = \{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, B_{N(A^t)} = \{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

לפי המשפט $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^4$

ו $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$

דוגמא לסעיף 3: כעת יהיה $v \in \mathbb{R}^4$ אזי קיימים סקלארים כך ש

$$v = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

וההצגה היא יחידה (כי המשפט אומר ש $B_R \cup B_N$ בסיס ל $\mathbb{R}^4$).

נגדיר: $v_N = \alpha_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_R = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ואז $v = v_R + v_N$ באופן יחיד.

תרגיל. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $rank(A) + rank(B) > n$. הוכח $AB \neq 0$
הוכחה: נניח בשלילה כי $AB = 0$ כלומר לכל i $AC_i(B) = 0$
$\Leftarrow C(B) \subset N(A)$. $\Leftarrow rank(B) = dim(C(B)) \leq dim(N(A))$.
$\Leftarrow rank(B) + rank(A) \leq dim(N(A)) + rank(A) = n$ סתירה לנתון. ■
הוכח/הפרך: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ אזי 4 המרחביים היסודיים של $A, \alpha A$ שווים.
הוכחה (עבור האפס השמאלי והשאר דומה): צ"ל $N(A^t) = N(\alpha A^t)$.
$(\supseteq)$ יהא $x \in N(\alpha A^t)$. $\Leftarrow \alpha A^t x = 0$ נכפול ב α^{-1} ונקבל $A^t x = 0 \Leftarrow x \in N(A^t)$.
$(\subseteq)$יהא $x \in N(A^t) \Leftarrow A^t x = 0 \Leftarrow \alpha A^t x = 0 \Leftarrow x \in N(\alpha A^t)$ ■.
הוכח הפרך: תהא $B, A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ כך ש־4 המרחבים היסודיים שווים אזי $B = \alpha A$.
הפרכה: ניקח $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
אזי קל לראות ש $C(A) = C(B) = R(A) = R(B) = \mathbb{R}^2$.
בנוסף לפי המשפט על המימדים נקבל ששאר המרחביים שווים ל $\{0\}$.
לכן 4 המרחביים היסודיים שווים אבל Bאינה כפולה של A. ■

סיכום (אלגוריתם למציאת 4 המרחבים)

בהנתן מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ נדרג את המטריצה ואז:

1. שורות השונות מאפס מהוות בסיס למרחב השורות.
2. עמודות המטריצה המקורית המתאימות לעמודות ציר מהוות בסיס למרחב העמודה.
3. ע"י הצבת פרמטרים במשתנים החופשיים נמצא את הפתרון הכללי. ממנו נסיק את הבסיס למרחב האפס.
4. במרחב האפס השמאלי נטפל בנפרד ע"י שחלוף A וחזרה לסעיף 3.