פתרון מבחן מועד ב – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 22/03/18

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(7x)}$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{7x}{\sin(7x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x}_{\text{חסומה}\cdot\text{אפיסה}\to 0}\cdot\frac{1}{7}=0$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\left(e^x-x\cdot\arctan(x)\right)$

$$\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\arctan(x)\right)=\left\{\infty\left(1-0\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\infty$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln(n)}$

לפי סדרי גודל, החל משלב מסויים:

$$1\le\ln(n)\le n$$

$$1\le\sqrt[n]{\ln(n)}\le\sqrt[n]{n}\to 1$$

ולפי סנדביץ' נקבל כי גבול הסדרה הוא 1.

2.

א. חשבו את $\int\frac{x^3+1}{x^2+5x+4}dx$.

ראשית נבצע חילוק פולינומים ונקבל

$$\frac{x^3+1}{x^2+5x+4}=x-5+\frac{21x+21}{x^2+5x+4}$$

$$\int(x-5)dx=\frac{x^2}{2}-5x$$

נבדוק אם המכנה של השבר פריק, אם כן צריך לפרק לשברים חלקיים, אם לא אז כבר מדובר בשבר חלקי.

$$\frac{21x+21}{x^2+5x+4}=\frac{21x+21}{(x+1)(x+4)}=\frac{21}{x+4}$$

סה"כ התשובה היא

$$\frac{x^2}{2}-5x+21\ln|x+4|+C$$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}dx$.

$$\frac{1+e^{-x}}{x}>\frac{1}{x}$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון, האינטגרל שלנו מתבדר.

.3

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x+\sin(x)=e^{-x}$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=e^x-e^{-x}+\sin(x)$$

$$h'(x)=e^x+e^{-x}+\cos(x)$$

לכל $x\geq 0$ מתקיים כי $e^x\geq 1$ ולכן לכל $x\geq 0$

$$h'(x)=(e^x+\cos(x))+e^{-x}\geq e^{-x}>0$$

באופן דומה, לכל $x<0$ מתקיים כי

$$h'(x)=(e^{-x}+\cos(x))+e^x\geq e^x>0$$

כלומר $h'>0$ בכל הממשיים, ולכן הפונקציה $h$ עולה, וחותכת את הציר לא יותר מאשר פעם אחת.

במקרה זה ניתן לשים לב כי

$$h(0)=0$$

ולכן הפונקציה אכן חותכת את הציר, וסה"כ יש לה חיתוך יחיד.

ב. מצאו את הערך המינימלי של הפונקציה $f(x)=e^{x}+e^{-x}-\cos(x)$ .

ראשית נשים לב כי

$$f'(x)=e^{x}-e^{-x}+\sin(x)=h(x)$$

לפי החקירה מסעיף קודם, $h$ עלתה תמיד וחתכה את הציר בראשית הצירים.

לכן הייתה שלילית בשליליים, וחיובית בחיוביים, כלומר $f$ עולה בתחום $[0,\infty)$ ויורדת בתחום $(-\infty,0]$

ומקבל את הערך המינימלי שלה בדיוק ב$x=0$

$$f(0)=1$$

4. תהי פונקציה $f$ עבורה $2f(x)f'(x)\geq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ .

א. הוכיחו/הפריכו: לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x)\geq 0$ .

נבחר $f(x)=-1$ קבוע, ואכן $2\cdot f\cdot f'=0$ אך $f(x)<0$

דוגמא נוספת $f(x)=-e^{x}$ ואז $2ff'=2e^{2x}>0$ אך $f<0$

ב. הוכיחו שאם $f(0)=0$ אזי לכל $x<0$ מתקיים כי $f(x)=0$ .

נשים לב

$$\left(f^{2}(x)\right)'=2f(x)f'(x)\geq 0$$

ולכן $f^{2}(x)$ פונקציה <u>עולה</u>.

כמו כן

$$f^{2}(0)=0$$

לכל $x<0$ מתקיים כי

$$0\underbrace{\leq}_{\text{ערך בריבוע}}f^{2}(x)\underbrace{\leq}_{\text{הפונקציה עולה}}f^{2}(0)=0$$

ולכן לכל $x<0$ אכן $f^{2}(x)=0$ וכן $f(x)=0$.

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=2a_{n}-1$ , ותנאי ההתחלה $1<a_{1}$.

א. הוכיחו כי $a_{n}$ מונוטונית עולה.

$$a_{n+1}-a_{n}=a_{n}-1$$

נוכיח שלכל $n$ מתקיים כי $a_{n}>1$ ואז בעצם הוכחנו שהסדרה מונוטונית עולה כי

$$a_{n+1}-a_{n}=a_{n}-1>0$$

הוכחה באינדוקציה: בדיקה $a_1 > 1$ נתון; יהי $n$ עבורו $a_n > 1$ אזי $a_{n+1} = 2a_n - 1 = a_n + a_n - 1 > 1 + 0$

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

**<u>אם</u>** הסדרה חסומה אז היא מתכנסת לגבול סופי שנסמנו $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim 2a_n - 1$$

$$L = 2L - 1$$

$$L = 1$$

אבל כיוון שהסדרה עולה מתקיים כי

$$L \geq a_1 > 1$$

בסתירה.

ולכן היא <u>אינה</u> חסומה ולכן $a_n \to \infty$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + kn + k^2}$.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2 + kn + k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

זו סדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ הרציפה ב$[0,1]$ עם בחירת נקודות מתאימה ולפי משפט מתקיים כי

$$a_n \to \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

ב. הוכיחו כי השגיאה $h$ בקירוב של $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ על ידי פולינום מקלורן של הפונקציה $f(x)=\cos(x)$ מסדר $2$ מקיימת כי $|h|\le\frac{1}{96}$ (ללא שימוש במחשבון, כמובן).

$$f = cos, f' = -sin, f'' = -cos, f''' = sin$$

$$R_2 = \frac{\sin(c)}{3!}\left(\frac{1}{2}-0\right)^3 = \frac{\sin(c)}{48}$$

נותר להוכיח בעצם כי

$$|\sin(c)| \le \frac{1}{2}$$

כאשר $0 < c < \frac{1}{2}$

בתחום $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ למדנו בכיתה כי

$$0 < \sin(x) < x$$

ולכן

$$0 < \sin(c) < c < \frac{1}{2}$$