שאלה 1:

<u>סעיף א' (7 נק')</u>

נביט בפונקציות

$$f(x) = \frac{8\cdot\sin(x^4)}{x} + 16\cdot\sin\left(\frac{1}{x^6}\right)\cdot x^{12}$$

$$g(x) = 2\cdot\sin(x^3) - \sin\left(\frac{1}{x^7}\right)\cdot x^{13}$$

חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

פתרון:

ראשית נשים לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי

$$x^n\sin\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x^n}\right)}{\frac{1}{x^n}} \rightarrow_{x\to\infty} 1$$

זה נובע מהעובדה ש $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ ומכך ש $\frac{1}{x^n}\rightarrow_{x\to\infty} 0$

כמו כן, לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\frac{\sin(x^m)}{x^n}\rightarrow_{x\to\infty} 0$$

כיוון שמדובר בחסומה חלקי שואפת לאינסוף.

כעת לתרגיל:

$$\frac{f}{g} = \frac{x^6}{x^6}\cdot\frac{\frac{8\sin(x^4)}{x^7} + 16\cdot x^6\sin\left(\frac{1}{x^6}\right)}{2\cdot\frac{\sin(x^3)}{x^6} - x^7\sin\left(\frac{1}{x^7}\right)} = \frac{\frac{8\sin(x^4)}{x^7} + 16\cdot x^6\sin\left(\frac{1}{x^6}\right)}{2\cdot\frac{\sin(x^3)}{x^6} - x^7\sin\left(\frac{1}{x^7}\right)} \rightarrow \frac{0+16}{0-1} = -16$$

סעיף ב' (7 נק')

עבור הפונקציות מהסעיף הקודם, חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

פתרון:

הפעם נשים לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{x^m}=1$$

ולכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\lim_{x\to 0}x^m\sin\left(\frac{1}{x^n}\right)=0$$

כיוון שמדובר באפיסה כפול חסומה.

כעת לתרגיל:

$$\frac{f}{g}=\frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{8\cdot\frac{\sin(x^4)}{x^4}+16\cdot x^9\sin\left(\frac{1}{x^6}\right)}{2\cdot\frac{\sin(x^3)}{x^3}-x^{10}\sin\left(\frac{1}{x^7}\right)}\to\frac{8}{2}=4$$

סעיף ג' (7 נק')

נביט בסדרות

$$a_n=36^{\sqrt{n^2+2\cdot n+1}}$$

$$b_n=6^{2\cdot n}$$

חשבו את גבול הסדרה

$$\frac{a_n}{b_n}$$

פתרון:

$$\frac{36^{\sqrt{n^2+2n+1}}}{6^{2n}}=\frac{36^{\sqrt{n^2+2n+1}}}{36^n}=36^{\sqrt{n^2+2n+1}-n}\to 36^1=36$$

נחשב את גבול המעריך:

$$\sqrt{n^2+2n+1}-n=\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n+1}+n}=\frac{n}{n}\cdot\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}\to\frac{2}{2}=1$$

סעיף ד' (6 נק')

עבור הסדרות מהסעיף הקודם, חשבו את הגבול

$$\sqrt[n]{a_n - b_n}$$

פתרון:

$$\sqrt[n]{a_n - b_n} = \sqrt[n]{36^{\sqrt{n^2+2n+1}} - 36^n} = \sqrt[n]{36^n}\sqrt[n]{36^{\sqrt{n^2+2n+1}-n} - 1} = 36 \cdot \left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right)^{\frac{1}{n}} \to 36 \cdot 35^0 = 36$$

שאלה 2:

תהי סדרה המקיימת לכל n טבעי כי

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n^2 + 7 \cdot a_n + 8}{a_n^2 + 1}$$

הקדמה:

לפני שניגש לסעיפים, נביט בהפרש בין איבר לקודמו, ונבחן האם הסדרה מונוטונית.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^3 + a_n^2 + 7a_n + 8}{a_n^2 + 1} - a_n = \frac{a_n^3 + a_n^2 + 7a_n + 8 - a_n(a_n^2 + 1)}{a_n^2 + 1} = \frac{a_n^2 + 6a_n + 8}{a_n^2 + 1} = \frac{(a_n + 2)(a_n + 4)}{a_n^2 + 1}$$

כלומר איבר גדול מקודמו כל עוד $a_n \geq -2$ או $a_n \leq -4$.

כעת, אם הסדרה מתכנסת למספר סופי $a_n \to L$, נחשב את גבול שני הצדדים במשוואה לעיל ונקבל כי

$$L - L = \frac{(L + 2)(L + 4)}{L^2 + 1}$$

ולכן הגבול הינו $L = -2$ או $L = -4$.

סעיף א' (9 נק')

בסעיף זה בלבד נתון כי $a_1 = 5$ חשבו את גבול הסדרה

הוכחה:

כיוון ש$a_1 = 5$, מתקיים $a_2 > a_1 = 5$ וניתן להוכיח באינדוקציה כי הסדרה כולה גדולה מ5 ומונוטונית עולה.

כיוון שהגבולות הסופיים האפשריים הם שליליים בלבד, נובע כי הסדרה אינה מתכנסת לגבול סופי ולכן אינה חסומה ושואפת לאינסוף.

סעיף ב' (9 נק')

בסעיף זה בלבד נתון כי $a_1 < -8$ חשבו את גבול הסדרה

פתרון:

ראשית, כיוון ש$a_1 < -4$ נובע כי $a_2 > a_1$.

האם הסדרה ממשיכה לעלות?

נוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים כי $a_n < -4$ ולכן הסדרה תהא מונוטונית עולה.

אכן, בהנתן $a_n < -4$ מתקיים כי:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n^2 + 7a_n + 8}{a_n^2 + 1} = a_n + 1 + \frac{6a_n + 7}{a_n^2 + 1} < -4 + 1 + \frac{-24 + 7}{16 + 1} = -4$$

כלומר הסדרה מונוטונית עולה, חסומה על ידי -4 מלמעלה, ולכן מתכנסת.

כיוון שהיא חסומה מלמעלה על ידי -4 הגבול שלה קטן או שווה ל-4 ולכן הגבול -2 נפסל, ונובע ש$a_n \to -4$.

סעיף ג' (9 נק')

רשמו בקבוצה את כל הגבולות האפשריים של הסדרה לכל ערכי האיבר הראשון;

כלומר גבול L שייך לקבוצה שתרשמו אם ורק אם קיים קבוע $c \in \mathbb{R}$ כך שבהנתן $a_1 = c$ נובע כי $a_n \to L$.

פתרון:

ראינו שאם $a_1 < -4$ גבול הסדרה הוא -4 ושאם $a_1 > -2$ גבול הסדרה הוא אינסוף.

אם נציב $a_1 = -4$ נקבל את הסדרה הקבועה -4 ואם נציב $a_1 = -2$ נקבל את הסדרה הקבועה -2.

כעת, מה יקרה אם נציב $-4 < a_1 < -2$?

מתקיים כי $a_2 < a_1$ ואנחנו רוצים להוכיח באינדוקציה כי $a_n > -4$ ולכן הסדרה תהא מונוטונית יורדת, וכיוון שהיא חסומה מלרע היא תתכנס. בנוסף, כיוון שהיא יורדת הגבול שלה קטן או שווה לאיבר הראשון שקטן ממש מ-2 ולכן גבולה יהיה -4

בהנתן $a_n > -4$ רוצים להוכיח כי $a_{n+1} > -4$

כלומר רוצים להוכיח כי

$$\frac{a_n^3 + a_n^2 + 7a_n + 8}{a_n^2 + 1} > -4$$

זה נכון אם ורק אם

$$a_n^3 + a_n^2 + 7a_n + 8 > -4a_n^2 - 4$$

$$a_n^3 + 5a_n^2 + 7a_n + 12 > 0$$

ואכן

$$a_n^3 + 5a_n^2 + 7a_n + 12 = (a_n + 4)(a_n^2 + a_n + 3) > 0$$

הערה: שימו לב שלא היה צורך להוכיח ש$a_n > -4$ לכל n על מנת לענות על השאלה. הרי גם אם הסדרה בשלב מסויים תהא קטנה או שווה ל-4, הוכחנו שעבור איבר ראשון כזה נוסחאת הנסיגה מגדירה סדרה ששואפת ל-4.

לסיכום הגבולות האפשריים הם

$$\{-4, -2, \infty\}$$

שאלה 3:

סעיף א' (14 נק')

כתבו בקבוצה את כל ערכי הפרמטר a עבורם לכל c ממשי יש פתרון למשוואה הבאה:

(אם ישנם אינסוף ערכים, בחרו 3 מהם ורשמו בקבוצה אותם בלבד, אם אין ערכים כאלה רשמו את הקבוצה הריקה {})

$$|a^2 - 4| \cdot x^6 + a^2 \cdot x^5 + c \cdot x^2 + 5 = 5 \cdot a \cdot x^5 - 6 \cdot x^5$$

פתרון:

ראשית נעביר אגף, ונביט בפונקציה

$$h(x) = |a^2 - 4|x^6 + (a^2 - 5a + 6)x^5 + cx^2 + 5$$

אנחנו רוצים למצוא ערכי a עבורם לכל c לפונקציה יש חיתוך עם ציר האיקס.

ראשית נביט בערכי a המאפסים את המקדם של x^6.

עבור $a = -2$ נקבל

$$h(x) = 20x^5 + cx^2 + 5$$

כעת נחשב את הגבולות בקצוות

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} x^5\left(20 + \frac{c}{x^3} + \frac{5}{x^5}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} x^5\left(20 + \frac{c}{x^3} + \frac{5}{x^5}\right) = -\infty$$

לכן קיימת נקודה מעל הציר, ונקודה מתחת לציר ולכן לפי משפט ערך הביניים, כיוון ש h רציפה בכל הממשיים, היא חותכת את הציר בין שתי הנקודות הללו.

עבור $a = 2$ נקבל

$$h(x) = cx^2 + 5$$

עבור c חיובי בוודאי שלא חייב להיות לפונקציה חיתוך עם ציר איקס.

כעת, נניח כי $a \neq \pm 2$ ונראה כי עבור ערך גדול מספיק של c לפונקציה אין נקודת חיתוך עם ציר האיקס, ולכן התשובה היא $a = -2$ בלבד. ראשית נשים לב כי

$$h(x) = |a^2 - 4|x^6 + (a^2 - 5a + 6)x^5 + cx^2 + 5 = x^2(|a^2 - 4|x^4 + (a^2 - 5a + 6)x^3 + c) + 5$$

נחשב את הגבולות הבאים באינסוף ומינוס אינסוף

$$\lim_{x\to\pm\infty}|a^2-4|x^4+(a^2-5a+6)x^3=\lim_{x\to\pm\infty}x^4\left(|a^2-4|+\frac{(a^2-5a+6)}{x}\right)=\infty$$

(כאן משתמשים בעובדה ש $|a^2-4|\neq 0$)

לכן קיים M כך שלכל $|x|>M$ מתקיים כי $|a^2-4|x^4+(a^2-5a+6)x^3>0$

לפי ווירשטראס, בקטע $[-M,M]$ הפונקציה $|a^2-4|x^4+(a^2-5a+6)x^3$ מקבלת מינימום.

אם נבחר c חיובי שגדול מהמינימום הזה, נקבל כי לכל x

$$|a^2-4|x^4+(a^2-5a+6)x^3+c>0$$

ולכן

$$h(x)=x^2(|a^2-4|x^4+(a^2-5a+6)x^3+c)+5>0$$

כפי שרצינו.

<u>סעיף ב' (13 נק')</u>

כתבו בקבוצה את כל ערכי הפרמטר a עבורם <u>לכל ממשי c</u> יש פתרון למשוואה הבאה:

(אם ישנם אינסוף ערכים, בחרו 3 מהם ורשמו בקבוצה אותם בלבד, אם אין ערכים כאלה רשמו את הקבוצה הריקה {})

$$|a^2-4|\cdot x^6+a^2\cdot x^5+x+c=5\cdot a\cdot x^5-6\cdot x^5$$

פתרון:

שוב נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=|a^2-4|x^6+(a-2)(a-3)x^5+x+c$$

בדומה לסעיף קודם, עבור $a=-2$ נקבל שלמשוואה יש חיתוך עם ציר האיקס.

הפעם, עבור $a=2$ נקבל

$$h(x)=x+c$$

שכמובן חותך את ציר האיקס בנקודה $x=-c$.

עבור $a\neq\pm 2$ נקבל בדומה לסעיף קודם כי הפונקציה

$$|a^2-4|x^6+(a-2)(a-3)x^5+x$$

שואפת לאינסוף בפלוס ומינוס אינסוף ולכן עבור c גדול מספיק הפונקציה h אינה חותכת את ציר האיקס.

שאלה 4:

תהי f פונקציה המקיימת $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) < 0$ וכן

$$f(4) = 6$$
$$f'(4) = -2$$

סעיף א' (13 נק')

מצאו את ערך $x_1 \in \mathbb{R}$ הקטן ביותר עבורו ניתן לקבוע בוודאות מהנתונים כי $f(x_1) < 0$.

אם אין ערך כזה, כתבו $\inf -$

פתרון:

כיוון שהנגזרת השנייה שלילית, הנגזרת הראשונה יורדת.

לכן לכל $x > 4$ מתקיים כי $f'(x) < -2$

נעביר אגף ונביט בפונקציה הקדומה

$$h(x) = f(x) + 2x$$

וכיוון שהנגזרת שלה שלילית, היא יורדת.

לכן, לכל $x > 4$ מתקיים כי

$$h(x) < h(4)$$

כלומר

$$f(x) + 2x < f(4) + 8$$

ולכן

$$f(x) < -2x + 14$$

לכן, לכל $x < 7$ מתקיים כי $f(x) < 7$.

האם ניתן להתקרב ל7 כרצוננו?

יהי $c > 0$ נביט בפונקציה

$$f(x) = -c(x-4)^2 - 2x + 14$$
$$f''(x) = -2c < 0$$
$$f(4) = 6$$
$$f'(4) = -2$$

כעת $f(7-\varepsilon) = -3c\varepsilon^2 + \varepsilon = \varepsilon(1 - 3c\varepsilon)$

לכל $\varepsilon > 0$ אם נבחר $c < \frac{1}{3\varepsilon}$ נקבל כי $f(7-\varepsilon) > 0$ ולכן לא ניתן להבטיח שהפונקציה שלילית באף נקודה לפני $x = 7$.

סעיף ב' (14 נק')

נתון בנוסף כי קיימים $m, b \in \mathbb{R}$ כך ש

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx - b = 0$$

מצאו את החסם התחתון של הערכים האפשריים של b.

אם אין ערך כזה, כתבו $\inf$ —.

פתרון:

ראשית, נוכיח כי $m \le f'(4) = -2$

נב"ש כי $m > -2$

$$f(x) - mx - b = f(x) - (-2x + 14) + (-2x + 14) - mx - b < 0 + (-2 - m)x + 14 - b \to_{x\to\infty} (-\infty)$$

בסתירה.

כעת, נחקור את הפונקציה

$$h(x) = f(x) - mx - b$$

נגזור,

$$h'(x) = f'(x) - m$$

$$h''(x) = f''(x) < 0$$

לכן h' יורדת.

נשים לב כי

$$h'(4) = -2 - m > 0$$

אם קיימת נקודה עבורה

$$f'(c) < m$$

אז נקבל באופן דומה לסעיף א' כי אחרי נקודה זו

$$f(x) < f'(c)x + D$$

עבור קבוע כלשהו, ושוב נקבל כי $f(x) - mx - b \to_{x\to\infty} (-\infty)$, בסתירה.

ולכן מתקיים כי

$$h'(x) \ge 0$$

לכל x ולכן הפונקציה h עולה.

כיוון שהיא שואפת לאפס היא שלילית לכל x ולכן

$$h(4) = f(4) - 4m - b < 0$$

כלומר

$$6-4m<b$$

וכיוון ש $m \le -2$ נובע כי

$$14 \le 6-4m<b$$

כעת נותר להוכיח כי 14 הוא החסם התחתון של ערכי b האפשריים, כלומר שניתן להתקרב אליו.

לכל $c>0$ נביט בפונקציה

$$f(x)=c\left(-e^{-(x-4)}+1\right)-(2+c)x+14+4c$$

$$f''(x)=-e^{-(x-4)}<0$$

$$f(4)=6$$

$$f'(4)=-2$$

$$f(x)-(-(2+c)x+14+3c)\to_{x\to\infty} 0$$

ולכן לכל $\varepsilon>0$ עבור $c<\frac{\varepsilon}{3}$ נקבל כי $b<14+\varepsilon$, כפי שרצינו.