תרגיל בית 3

שאלה 1

יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: AB הפיכה $\Leftrightarrow$ A הפיכה וגם B הפיכה.

שאלה 2

יהיו $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\2&4&3\end{pmatrix}$ מצא שתי מטריצות הפיכות P,Q כך ש $B=PAQ$.

שאלה 3

א. מצא את המטריצה ההופכית של המטריצה $\begin{pmatrix}2&3&4&5\\1&2&3&4\\1&1&2&3\\1&1&1&2\end{pmatrix}$.

ב. חשב את המטריצה ההופכית (מעל $\mathbb{Z}_5$) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$.

שאלה 4

תהיינה A ו B מטריצות ריבועיות מאותו סדר, כך שמתקיים $A^3=I$ ו $BA=A(A+I)$.

א. הוכיחו כי $A^{-1}=A^2$.

ב. הוכיחו כי $B=A+I$.

ג. הוכיחו כי $BABA=A^2B^2$

שאלה 5

נסמן $T_\varphi=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$.

א. הוכח כי לכל α,β ממשיים מתקיים $T_\alpha\cdot T_\beta=T_{\alpha+\beta}$.

ב. הוכח כי לכל α ממשי מתקיים $T_\alpha^{-1}=T_{-\alpha}$.

ג. תנו דוגמא למטריצה A 2×2, כך שמתקיים $A^6=I$.

שאלה 6

יהא $\mathbb{R}^2$ עם פעולת חיבור וקטורים הרגילה. בכל אחד מהסעיפים הבאים מוצעת הגדרה לכפל בסקלר. בדוק האם ההצעה אכן נותנת מרחב וקטורי.

א. $\alpha\left(x,y\right)=\left(\alpha x,y\right)$.

ב. $\alpha\left(x,y\right)=\left(\alpha x,0\right)$.

ג. $\alpha\left(x,y\right)=\left(\alpha^2x,\alpha^2y\right)$.

ד. $\alpha\left(x,y\right)=\left(0,0\right)$.

<u>שאלה 7</u>

אם U,V מרחבים וקטורים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, אפשר להגדיר את מרחב המכפלה $U\times V$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, בצורה הבאה:

- $U\times V:=\left\{(u,v):u\in U,v\in V\right\}$.
- סכום וקטורים לפי רכיבים $(u_1,v_1)+(u_2,v_2):=(u_1+_U u_2,v_1+_V v_2)$.
- כפל סקלרי - $\alpha(u,v):=(\alpha u,\alpha v)$.

הוכח שמרחב המכפלה הוא אכן מרחב וקטורי.

<u>שאלה 8</u>

א. בדוק האם הוקטורים הבאים תלויים ליניארית ב $\mathbb{R}[x]$ מעל $\mathbb{R}$:

$$f_1(x)=1+3x+x^2-2x^3-3x^4,\ f_2(x)=1+4x+3x^2-x^3-4x^4$$
$$f_3(x)=2+3x-4x^2-7x^3-3x^4,\ f_4(x)=3+8x+x^2-7x^3-8x^4$$

ב. מצא לאילו ערכים של a יהיו הוקטורים הבאים בלתי תלויים ליניארית ב $\mathbb{R}^3$:

$v_1=(1,2,a),v_2=(2a+1,2,3),v_3=(2,4,a-1)$.

<u>שאלה 9</u>

יהי $\mathbb{R}^2$ עם פעולות החיבור והכפל הבאות:

- פעולת חיבור: לכל $P_1,P_2\in\mathbb{R}^2$ נגדיר $P_1\oplus P_2$ להיות אמצע הקטע P_1P_2.
- פעולת כפל בסקלר: לכל $P\in\mathbb{R}^2,t\in\mathbb{R}$ נגדיר $t\otimes P$ להיות סיבוב הוקטור $\overrightarrow{OP}$ t רדיאנים נגד כיוון השעון.

א. חשב את הביטויים הבאים:
- $(1,7)\oplus(8,3)$.
- $\pi\otimes(1,3)$.
- $\left(\frac{\pi}{2}\otimes(1,1)\right)+\left(\frac{\pi}{4}\otimes(0,2)\right)$.

ב. האם $\mathbb{R}^2$ עם פעולות החיבור והכפל שהגרנו בשאלה הוא מרחב וקטורי מעל שדה הממשיים? הוכח את תשובתך!!!

<u>שאלה 10</u>

בכל אחד מהסעיפים הבאים, בדוק האם הנפרש שווה לקבוצה המושווית אליו. אם כן, בטא איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים. אם לא, מצא איבר שנמצא בקבוצה ולא בנפרש:

א. $\mathbb{R}^3\overset{?}{=}span\left\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\right\}$.

ב. $\mathbb{R}_3[x]\overset{?}{=}span\left\{1,x+x^2,4x^3+x^2,2x\right\}$.

ג. $\mathbb{R}^{2\times2}\overset{?}{=}span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}\right\}$