יריעות (Manifolds)

יריעה k ממדית היא צורה k ממדית שניתן לעשות עליה חדו"א. מה שמבטיח זאת היא העובדה שבאופן מקומי, היריאה נראית כמו $\mathbb{R}^k$

$$\int_{\text{manifold}} \omega$$

- יריעות 0 ממדיות הם נקודות
- יריעות 1 ממדיות הן עקומות
- יריעות 2 ממדיות הן משטחים

הגדרה

קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת יריעה k ממדית אם לכל $a \in M$ קיימת סביבה V_a בM ה"דומה" לתת קבוצה פתוחה Ω של $\mathbb{R}^k$. כלומר קיימת העתקה $\varphi_a : \Omega \to V_a$ חח"ע ועל(אף יותר לפעמים)

$$\underbrace{(t_1, \dots t_k)}_{\in \Omega} \mapsto (\varphi_1, \dots \varphi_n)$$

דורשים רגולריות $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right) = k$(דרגת היעקוביאן מסקימלית)

הזוג (Ω, φ) נקרא מפה של היריעה M, ו$(t_1 \dots t_k)$ נקראות הקואורדינטות של היריאה באותה הסביבה.

אוסף מפות $\{(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ המכסה את היריעה M ($M = \bigcup_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(\Omega_\alpha)$) נקרא אטלס.

העתקה $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j : \Omega_j \to \Omega_i$ נקראת העתקת מעבר.

דוגמה

1. ספירת היחידה ב$\mathbb{R}^3$ $S^2 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$
   נגדיר:

$$\Omega = \left\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \middle| t^2 + s^2 < 1\right\}$$

(כלומר Ω עיגול)

$$\underset{(t,s)\mapsto\left(t,s,\sqrt{1-t^{2}-s^{2}}\right)}{\varphi_{1}:\Omega\to S^{2}}$$

זה מכסה את חצי הכדור העליון(בלי השפה)

$$\underset{(t,s)\mapsto\left(t,s,-\sqrt{1-t^{2}-s^{2}}\right)}{\varphi_{2}:\Omega\to S^{2}}$$

זה מכסה את חצי הכדור התחתון. אבל קו המשווה לא מכוסה!
נכסה גם את חצי הספירה המזרחית והמערבית:

$$\underset{(t,s)\mapsto\left(t,\sqrt{1-t^{2}-s^{2}},s\right)}{\varphi_{3}:\Omega\to S^{2}}$$

$$\underset{(t,s)\mapsto\left(t,-\sqrt{1-t^{2}-s^{2}},s\right)}{\varphi_{4}:\Omega\to S^{2}}$$

ניתן להגדיר φ_5,φ_6 באופן דומה, ולקבל אטלס 6:

$$\left\{(\Omega,\varphi_i)\right\}_{i=1}$$

עבור פונקציה סתומה

כאשר הקבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ מוגדרת בצורה סתומה,

$$M=\left\{ (x_{1},\dots x_{n})\left|\begin{array}{c} g_{1}\left(x_{1},\dots x_{n}\right)=0\\ g_{2}\left(x_{1},\dots x_{n}\right)=0\\ \vdots\\ g_{m}\left(x_{1},\dots x_{n}\right)=0 \end{array}\right.\right\}$$

התנאי שM יריעה הוא $\text{rank}\left(\dfrac{\partial g_{i}}{\partial x_{j}}\right)=m$.

דוגמה

.1

$$M=\left\{ (x,y)|g\left(x,y\right)=xy-1=0\right\}$$

זוהי היפרבולה. היעקוביאן הוא

$$\nabla g=(y,x)$$

$\text{rank}\nabla g=1$ אלא אם כן $x=y=0$, ואז $\text{grad}\nabla\left(0,0\right)=\left(0,0\right)$ והדרגה אפס - אבל זה לא על המשטח.
האטלס הוא

$$\left\{ \left(\mathbb{R}^{+},\frac{1}{x}\right),\left(\mathbb{R}^{+},-\frac{1}{x}\right)\right\}$$

.2

$$M=\left\{ \left(x,y\right)\middle|\overbrace{x\cdot y}^{g(x,y)}=0\right\}$$

גם הפעם $\nabla g=\left(y,x\right)$, אבל הפעם הגדיאנט יכול להתאפס, ולכן זו אינה יריעה.

.3

$$M=\left\{ \left(x,y,z\right)\middle|\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}+z^{2}-1=0\\x+y+z-1=0\end{array}\right\}$$

זהו כדור החתוך ע"י מישור

$$\nabla g=\begin{pmatrix}\nabla g_{1}\\\nabla g_{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 2y & 2z\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

ברור ש$\text{rank}\geq1$ אבל אם $x=y=z$ אז $\text{rank}=1$.
נבדוק אם עלולים לקבל $\text{rank}=1$.

$$x=y=z=a$$

$$a^{2}+a^{2}+a^{2}=1\Rightarrow3a^{2}=1\Rightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a+a+a=1\Rightarrow3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

אין מצב כזה $\Leftarrow$ $\text{rank}\equiv2$

הערה

כל משוואה בת"ל $g_{i}=0$ מורידה את המימד ב1