הגדרה

מודול מעל חוג R הוא חבורה אבלית $(M,+)$ יחד עם פעולה $R\times M\to M$, שמקיימת את האקסיומות הבאות ($\begin{matrix} r_i\in R \\ a_i\in M\end{matrix}$):

- $(r_1+r_2)\,a=r_1a+r_2a$
- $r\,(a_1+a_2)=ra_1+ra_2$
- $r_1\,(r_2a)=(r_1r_2)\,a$

הגדרה

מודול M מעל R הוא נוצר סופית אם קיים t כך ש-$M=\sum\limits_{i=1}^{t}Ra_i$ עבור $a_1,\dots a_t\in M$.
הוא ציקלי אם אפשר לקחת $t=1$.

הגדרות

I. R מודול מעל עצמו.
יותר כללי: אם $R\subseteq S$ חוגים אז S הוא מודול מעל R - קוראים לזה R-מודול.

II. **עבור** R **שדה**, מרחב וקטורי = מודול.

III. עבור $R=\mathbb{Z}$, מודול=חבורה אבלית כי הכפל מוכרך להיות $na=a+a+\cdots+a$ n פעמים עבור $n\in\mathbb{N}$ ו-$-na=-(na)$.

מילון

- תת מודול = תת חבורה $N\leq M$ שמקיימת $RN\subseteq N$ (ולכן $RN=N$ כי $1\in R$)
  - מקביל לתת חבורה בחבורות אבליות
- M/N חבורה ואפילו מודול לפי $r\,(a+N)=ra+N$
  - מקביל לחבורת מנה
- משפטי נותר - עובדים גם בחבורות אבליות וגם במודולים.

דוגמה

I. כל תת מודול של $\mathbb{Z}$ הוא מהצורה $m\mathbb{Z}$, כלומר הוא ציקלי.

II. אם $R \lhd I$ אז R/I מודול(אפילו אם I אידיאל שמאלי) וR/I הוא מודול ציקלי כל כל קוסט

$$a+I=a\left(1+I\right)\in R\left(1+I\right)$$

$$\therefore R/I=R\left(1+I\right)$$

מצד שני, כל מודול ציקלי $\cong R/I$ לאיזשהו אידיאל שמאלי I של R.

הוכחה: לכתוב $m=Ra$. נגדיר $f:R\to Ra=M$ לפי $r\mapsto ra$. f הומומורפיזם:

$$f\left(r_1+r_2\right)=f\left(r_1\right)+f\left(r_2\right)\qquad f\left(rr_1\right)=rf\left(r_1\right)$$

f על כי ra הוא $f\left(r\right)$ לכל $r\in R$, לכן נותר $I \Longleftarrow M=Ra\cong R/\ker f$.
אבל $\ker f$ הוא אידאל שמאלי I של R.
הוכחה שהגרעין הוא אידאל שמאלי:

$$\ker f=\left\{a|f\left(a\right)=0\right\}$$

$$a,b\in\ker f$$

אז

$$f\left(a+b\right)=f\left(a\right)+f\left(b\right)=0$$

$$f\left(ra\right)=rf\left(a\right)=r0=0$$

$\Longleftarrow$

$$\left.\begin{array}{r}a+b\in\ker f\\ \forall_{r\in R}ra\in\ker f\end{array}\right\}$$

כי $f\left(0\right)=0$:

$$\cancel{f\left(0\right)}=f\left(0+0\right)=f\left(0\right)+\cancel{f\left(0\right)}$$

$$0=f\left(0\right)$$

סימון

כותבים $M=\bigoplus M_i$ כאשר M סכום ישר של הM_i כחבורות אבליות, כאשר כל M_i הוא מודול.

משפט

כל מודול נוצר סופית מעל תחום שלמות ראשי הוא סכום ישר סופי של מודולים ציקליים.

דוגמה

עבור כל חוג R,

$$R^{(n)} := \underbrace{R \oplus \cdots \oplus R}_{n \text{ times}}$$

מודול מעל R כי הוא חבורה, והכפל מוגדר לפי

$$r\left(r_1, \ldots r_n\right) = \left(rr_1, \ldots rr_n\right)$$

ו $\hom\left(R^{(n)}, R^{(n)}\right)$ הוא חוג לפי $\begin{matrix}(f+g)(a) = f(a) + g(a) \\ fg(a) = f(g(a))\end{matrix}$ לכל $a \in R^{(n)}$ כחוגים,

$$\hom\left(R^{(n)}, R^{(n)}\right) \cong M_n(R)$$

הדוגמה הרביעית

$R = F[\lambda]$, $V = F^{(n)}$, $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית מעל F.
נגדיר $R \times V \to V$ לפי $\left(\sum \alpha_i \lambda^i\right)(v) = \sum \alpha_i T^i(v)$. במילים אחרות. במילים אחרות:

$$\boxed{\lambda v := T(v)}$$

$$\left(\lambda^i(v) = T\left(T\left(\cdots T(v)\right)\right) = T^i(v)\right)$$

מה התת מודולים של $V = F^{(n)}$? הם בדיוק התת מרחבים W כך ש$\lambda W \le W$. עכשיו לכתוב $V = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$ עבור M_i תת מודולים, וניקח בסיס(מעל F) של כל M_i מיוחד:
נתחיל עם $0 + N_i \in M_i$ ו$M_i = Rv_i$

$$v_i, \lambda v_i, \lambda^2 v_i, \ldots \lambda^{n_i - 1} v_i$$

$$\lambda^{n_i} = \left(\sum_{j=0}^{n_i - 1} \lambda^j\right) v_i$$

נגדיר $f_i(\lambda) = \lambda^{n_i} - \sum_{j=0}^{n_i-1} \alpha_{ij} \lambda^j$

$$f_i(\lambda) v_i = 0$$

אבל

$$M_i = F\left[\lambda\right] v_i$$

לכן

$$f_i\left(T\right)\left(M_i\right) = f_i\left(\lambda\right) M_i = 0$$

המטריצה של T ביחס לבסיס הזה היא:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \dots & \ddots & 1 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \cdots & \cdots & \alpha_{1,n-1} \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \dots & \ddots & 1 \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \cdots & \cdots & \alpha_{2,n-1} \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \dots & \ddots & 1 \\ \alpha_{t0} & \alpha_{t1} & \cdots & \cdots & \alpha_{t,n-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

לפי הבסיס הזה קיבלנו את הצורה הרציונלית. הוא פולינום מינימלי של $T|_{M_i}$, אבל $\deg f_i = n_i \Longleftarrow f_i$ פולינום האופייני של $T|_{M_i}$

תרגיל קל: $f_1, \dots f_t$ הוא פולינום האופייני של T.

יש משפט

אפשר לכתוב

$$M = R^{(k)} \oplus {}^{R}/_{Rf_1} \oplus \cdots \oplus {}^{R}/_{Rf_n}$$

$$k + n = t$$

$$0 \neq f_i \in R$$

בדוגמה שלנו, f_i הוא בדיוק הפולינום האופייני של $T|_{M_i}$.

$$a\left({}^{R}/_{Ra}\right)=0$$

כי

$$a\left(r+Ra\right)=ra+R\in R_a=0$$

$$f_1,\dots f_n$$

כך ש$f_{i+1} \mid f_i$ לכל $1\leq i\leq n$.
לא קשה לראות שf_n הוא הפולינום המינימלי של T, כי כל $f_n \mid f_i$ ולכן $\forall_i f_n\left(\lambda\right)M_i=0$.