

תרגיל בית 10 באלגברה מופשטת 1

88-211 סמסטר א' תשע"ו

1. קבע האם הפעולות הבאות של חבורה G על \mathbb{R}^2 היא פעולה של חבורה על קבוצה. באם כן, תארו את המסלול של $(0, 1)$ ושל $(1, 1)$.

$$t * (x, y) = (x + t, y + 2t) \quad G = \mathbb{R} \quad (\text{א})$$

$$t * (x, y) = (tx, t^2x) \quad G = \mathbb{Z} \quad (\text{ב})$$

$$A * (x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad G = \text{GL}_2(\mathbb{R}) \quad (\text{ג})$$

2. תהי G חבורה כלשהי. נסתכל על קבוצת הפונקציות $X = \{f : G \rightarrow \mathbb{C}\}$.

$$(\text{א}) \text{ הוכיחו כי } G \text{ פועלת על } X \text{ ע"י } (g * f)(a) = f(ag) \text{ לכל } a \in G$$

(ב) הוכיחו שהפונקציות הקבועות הן נקודת שבת של X .

(ג) חשבו את המייצב של χ המוגדרת ע"י:

$$\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$e \mapsto 1$$

$$e \neq g \mapsto 0$$

3. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X . נתונים $x, y \in X$ ו- $g \in G$ כך ש- $g * x = y$. הוכיחו כי $\text{Stb}(y) = g \text{Stb}(x) g^{-1}$.

כאשר $G_x = \text{Stb}(x) = \{g \in G \mid g * x = x\}$ הוא המייצב של x .

4. הכלילו את הטענה שראינו בכיתה: אם G חבורה מסדר p^k כאשר p ראשוני, פועלת על קבוצה X , כאשר $p \nmid |X|$. אזי ל- X יש נקודת שבת.

5. השתמשו בתרגיל הקודם והוכיחו: אם G חבורה מסדר p^k כאשר p ראשוני, אזי $Z(G) \neq \{e\}$.

6. אומרים שפעולה של חבורה G על קבוצה X , שהיא מגודל לפחות 2, היא 2-טרנזיטיבית אם לכל זוג איברים שונים $x_1 \neq x_2 \in X$ ולכל זוג $y_1 \neq y_2 \in X$ קיים $g \in G$ כך ש- $g * x_1 = y_1$ וגם $g * x_2 = y_2$.

(א) הוכח כי אם G פועלת 2-טרנזיטיבית על X אז היא גם פועלת טרנזיטיבית.

(ב) הוכיחו כי להיות 2-טרנזיטיבי שקול לכך ש G פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה $X \times X \setminus \Delta$. כאשר $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ ו G פועלת על המכפלה רכיב-רכיב.

(ג) בהנחה ש $|\mathbb{F}| > 2$, הראה ש $GL_2(\mathbb{F})$ פועלת טרנזיטיבית על \mathbb{F}^2 , אבל לא 2-טרנזיטיבית.

(ד) אם $|\mathbb{F}| = 2$, הראו ש $GL_n(\mathbb{F})$ כן פועלת 2-טרנזיטיבית.

7. ניתן לצבוע קודקודי משולש שווה צלעות בכל אחד מ 3 צבעים שונים (אפשר להשתמש באותו צבע כמה פעמים שרוצים). כמה צביעות שונות יש? שימו לב שמשולש נחשב אותו משולש כאשר מסובבים או משקפים אותו כרצוננו.