בוחן - כל מה שהיה עד תירגול קודם. עם כל מה שדובר בנושאים אלו בהרצאה.

משפטי איזומורפיזם

1. משפט איזו ראשון: תהא $f:G\to H$ הומו' אזי

$$G/_{\ker f}\cong \mathrm{Im} f$$

   (א) בפרט אם f על מתקיים $G/_{\ker f}\cong H$

   (ב) בפרט אם f חח"ע מתקיים $G\cong \mathrm{Im} f$

2. דוגמה: ראיתם ש $\det : GL_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^*$ היא הומו' על.

$$\ker\det GL_n(\mathbb{R})=SL_n(\mathbb{R})$$

ולכן, לפי איזו' ראשון מתקיים ש

$$GL/_{SL}\cong\mathbb{R}^*$$

3. תרגיל $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ונגדיר את תת החבורה $H=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in G\mid y=3x\right\}$ (היא נורמאלית כי החבורה אבלית). הוכיחו $G/_H\cong\mathbb{R}$.
פתרון: נגדיר הומו' $f:G\to\mathbb{R}$ ע"י $f((a,b))=b-3a$ והיא על. הגרעין הוא H. ולכן לפי איזו ראשון סיימנו.

4. תרגיל: נסמן את מעגל היחידה במרוכבים ב

$$\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$$

שהיא חבורה כפלית. הוכיחו כי $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}\cong\mathbb{T}$.
פתרון: הערה: מספרים ב $\mathbb{T}$ ניתן לכתוב כ $cis(\theta)$. נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{T}$ ע"י

$$f(x)=cis(2\pi x)=e^{2\pi ix}$$

וזה הומו' והוא על (לפי הערה). ומה הגרעין?

$$\begin{aligned}\ker f &= \left\{x\in\mathbb{R} \mid e^{2\pi ix}=1=e^{0}\right\}\\ &=\{x\in\mathbb{R}\mid \exists k\in\mathbb{Z}:\ 2\pi ix=0+2\pi ki\}\\ &=\{x\in\mathbb{R}\mid \exists k\in\mathbb{Z}:\ x=k\}\\ &=\mathbb{Z}\end{aligned}$$

ולפי איזו ראשון סיימנו.

5. תרגיל: יהיו G,H חבורות סופית שהסדרים שלהם זרים. מצאו את כל ההומו' $f:G\to H$ האפשריים.
פתרון: יש את ההומו' הטריוואלי $f:G\to H$ המוגדר $f(g)=e_H$.
יש עוד? לא! למה? נניח $f:G\to H$ הומו' ונראה ש $\text{Im}f=\{e_H\}$. לפי איזו ראשון

$$G/_{\ker f}\cong \text{Im}f$$

ולכן

$$\frac{|G|}{|\ker f|}=|G/_{\ker f}|=|\text{Im}f|$$

ולכן

$$|G|=|\ker f|\cdot|\text{Im}f|=|\ker f|\cdot|\text{Im}f|$$

ולכן $|\text{Im}f| \mid |G|$ ומכיוון ש $\text{Im}f$ הוא ת"ח של H נקבל ש $|\text{Im}f| \mid |H|$ ולכן, מכיוון ש $|G|,|H|$ זרים, נקבל ש $|\text{Im}f|=1$ ולכן $\text{Im}f=\{e_H\}$.

6. מצאו את כל כל האפשרויות לגרעין $\ker f$ עבור הומו' $f:\mathbb{Z}_{14}\to D_{10}$? (עד כדי איזו')
פתרון: נתחיל עם הגדול האפשרי לתמונה: ראינו ש $|\text{Im}f| \mid |\mathbb{Z}_{14}|,|D_{10}|$ כלומר

$$|\text{Im}f| \mid 14,20$$

ולכן $|\text{Im}f|\in\{1,2\}$.
אם $|\text{Im}f|=1$ נקבל כי f ההומו' הטריוואלי ואז $\ker f=\mathbb{Z}_{14}$.
וגם $|\text{Im}f|=2$ אפשרי. למשל $f:\mathbb{Z}_{14}\to D_{10}$ המוגדר ע"י $f(k)=\tau^k$ הוא הומו' והוא על והתמונה היא $\{e,\tau\}$. לפי משפט איזו ראשון

$$G/_{\ker f}\cong \text{Im}f$$

ולכן, בדומה למקודם, $|\ker f|=\frac{14}{2}=7$. ומכיוון ש 7 ראשוני, $\ker f\cong\mathbb{Z}_7$ (אפילו

.($\ker f = 2\mathbb{Z}_{14}$

7. משפט איזו שני: תהא G חבורה, $H \le G$ ו $N \trianglelefteq G$ אזי

$$NH/N \cong H/N\cap H$$

(א) למשל $H = 15\mathbb{Z}$ ו $N = 6\mathbb{Z}$ בתוך $G = \mathbb{Z}$.

$$"NH" = N + H = 6\mathbb{Z} + 15\mathbb{Z} = \gcd(6,15)\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$$

$$N \cap H = 6\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z} = \mathrm{lcm}(6,15)\mathbb{Z} = 30\mathbb{Z}$$

ולפי משפט איזו שני נקבל ש

$$3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong 15\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$$

8. משפט ההתאמה ואיזו שלישי: תהא G חבורה ו $N \trianglelefteq G$

- תתי החבורה של G/N הם מהצורה H/N עבור $N \le H \le G$.
- עבור $H \trianglelefteq G$ מתקיים כי

$$G/N\big/H/N \cong G/H$$

ובפרט - כפליות האינדקס: $[G:N] = [G:H][H:N]$

(א) דוגמה: $8\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$ ו $H = 2\mathbb{Z}$ (הכל נורמלי, החבורה אבלית. וגם $8\mathbb{Z}$ היא ת"ח של $2\mathbb{Z}$. באופן, מתי $m\mathbb{Z} \le n\mathbb{Z}$? אמ"מ $n|m$). לפי משפט האיזו השלישי

$$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})\big/(2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

(ב) תתי החבורות של $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.
פתרון: התשובה שלכם. תשובה יותר מאולצת בשביל ההדגה: תתי החבורות של $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הם $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ כאשר $m|n$ (משפט ההתאמה) ולכן

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\big/(m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \frac{n}{m}\mathbb{Z}_n$$

שימו לב $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \frac{n}{m}\mathbb{Z}_n$ כי נגדיר $f:\mathbb{Z} \to \frac{n}{m}\mathbb{Z}_n$ ע"י $f(k) = \frac{n}{m}k$ וזה הומו'

והוא על. והגרעין הוא

$$\begin{aligned}\ker f &= \left\{k \mid \frac{n}{m}k \equiv 0 \mod n\right\} \\ &= \left\{k \mid \exists p:\ \frac{n}{m}k \equiv pn\right\} \\ &= \{k \mid \exists p:\ k \equiv pm\} \\ &= m\mathbb{Z}\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \frac{n}{m}\mathbb{Z}_n$$

מסקנה: תתי החבורות של $\mathbb{Z}_n$ הם מהצורה $k\mathbb{Z}_n$ עבור $k|n$.

9. חבורה G תקרא פשוטה אם תתי החבורות הנורמליות שלה הן $G, \{e\}$ בלבד.

(א) למשל $\mathbb{Z}_p$ פשוטה עבור p ראשוני. (מוזמנים להוכיח שכל חבורה אבלית פשוטה היא איזו ל $\mathbb{Z}_p$ עבור p ראשוני. רמז: משפט קושי).

(ב) למשל עבור G ו $N \neq G$ תח"נ מקסמאלית מתקיים כי G/N פשוטה. למה? לפי משפט ההתאמה תתי החבורות של G/N הם מהצורה H/N עבור $N \leq H \leq G$.
ותתי החבורות הנורמליות הם מהצורה H/N עבור $N \leq H \trianglelefteq G$.
למשל $G = 3\mathbb{Z}$ ו $H = 15\mathbb{Z}$ אז G/H פשוטה. למה $H \trianglelefteq G$ מקס' (ושונה ממנה)? כי

$$15\mathbb{Z} \leq a\mathbb{Z} \leq 3\mathbb{Z}$$

אזי $3|a|15$ ולכן $a \in \{3, 15\}$ ולכן אם קיימת תת חבורה $a\mathbb{Z}$ ששונה מ $3\mathbb{Z}$ ומכילה את $15\mathbb{Z}$ אזי היא שווה ל $15\mathbb{Z}$.
למשל $G = 3\mathbb{Z}$ ו $H = 6\mathbb{Z}$ אז G/H פשוטה.
למשל $G = 3\mathbb{Z}$ ו $H = 3p\mathbb{Z}$ עבור p ראשוני אז G/H פשוטה.

10. תרגיל: תהא G ו $N \trianglelefteq G$ מאינקס ראשוני p. הוכיחו שלכל ת"ח $H \leq G$ מתקיים כי $HN = G$ או $H \leq N$.
פתרון: תהא H ת"ח של G. לפי איזו שני נקבל ש

$$NH/N \cong H/N \cap H$$

אם $NH = G$ סיימנו. אחרת: לפי כפליות האינדקס

$$p = [G : N] = [G : NH][NH : N]$$

ומכיוון ש $[G:NH]>1$ נקבל ש $[G:NH]=p$ ולכן $[NH:N]=1$ ולכן

$$1=|{}^{NH}/_{N}|=|{}^{H}/_{N\cap H}|$$

ולכן

$$H=N\cap H\leq N$$