ב"א אלגברה לינארית תשפב מועד ב

1. נתון המספר המרוכב $z=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ ונתון מספר מרוכב w כך ש $|w|=r>0$. כמו כן נתון כי z,w נמצאים ברביע הראשון וכן כי $z=\frac{w}{(\overline{w})}$.

(א) הביעו באמצעות α ו r את המספר w, את הצמוד שלו $\overline{w}$ ואת ההופכי שלו $\frac{1}{w}$.
פתרון: נסמן $w=r\text{cis}\left(\beta\right)$ ונקבל ש $\overline{w}=r\text{cis}\left(-\beta\right)$ ואז הנתון $z=\frac{w}{(\overline{w})}$ הוא

$$\text{cis}(\alpha)=\frac{r\text{cis}\left(\beta\right)}{r\text{cis}\left(-\beta\right)}=\text{cis}\left(\beta-(-\beta)\right)=\text{cis}\left(2\beta\right)=\left[\text{cis}\left(\beta\right)\right]^2$$

ולכן $\text{cis}\left(\beta\right)=\pm\sqrt{\text{cis}(\alpha)}=\pm\text{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. כיוון שנתון ש z,w ברביע הראשון אזי $0\leq\alpha\leq90^\circ$ ולכן גם $0\leq\frac{\alpha}{2}\leq45^\circ$ ומכאן ש $\text{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ברביע הראשון ו $-\text{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ברביע השלישי. אם $\text{cis}(\beta)=-\text{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ גם $w=r\text{cis}(\beta)=r\left(-\text{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$ ברביע השלישי ונגיע לסתירה. מכאן שהאפשרות היחידה הנותרת היא $\text{cis}\left(\beta\right)=\text{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ומכאן ש $w=r\text{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. מכאן ש

$$\overline{w}=r\text{cis}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=r\text{cis}\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)$$

ו

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{r}\text{cis}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{r}\text{cis}\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)$$

(ב) שרטטו במערכת צירים את מעגל היחידה והוסיפו לשרטוט דוגמה של מספר w ושל ההופכי שלו $\frac{1}{w}$ עבור $r>1$.
פתרון: נניח שהקורא יודע לצייר את מעגל היחידה. כעת אפשר לקחת $w=10$ שבמערכת צירים מזוהה עם הנקודה $(10,0)$ וההופכי שלו $\frac{1}{w}=\frac{1}{10}$ מזוהה עם הנקודה $(\frac{1}{10},0)$.

(ג) נתונה סדרה הנדסית a_n שבה $a_1=\frac{1}{w}$ וכן $a_2=z$. הביעו באמצעות α ו- r את a_5.
פתרון: מנת הסדרה היא

$$q=\frac{a_2}{a_1}=zw=\text{cis}\left(\alpha\right)\cdot r\text{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=r\text{cis}\left(\frac{3\alpha}{2}\right)$$

ולכן

$$a_5=a_2q^3=z\cdot q^3=\text{cis}\left(\alpha\right)\cdot\left[r\text{cis}\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\right]^3=r\text{cis}\left(\alpha+\frac{9\alpha}{2}\right)=r\text{cis}\left(\frac{11\alpha}{2}\right)$$

2. יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר ונביט במערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + ay + (a-1)\,z & = 1 \\ -x - y + (2-a)\,z & = 1 \\ (2-a)\,x + \left(2a - a^2\right) y & = 1 \\ ax + a^2 y + (2a-2)\,z & = 1 \end{cases}$$

(א) מצאו לכל ערכי הפרמטר האם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או שאין פתרון.
פתרון: נעביר את מערכת המשוואות לייצוג במטריצה ונדרג אותה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & 1 \\ -1 & -1 & 2-a & 1 \\ 2-a & 2a-a^2 & 0 & 1 \\ a & a^2 & 2a-2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 + (a-2)\,R_1 \\ R_4 - aR_1}]{R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & a-1 \\ 0 & 0 & -a^2+3a-2 & 1-a \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a-2) & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

וכעת:
אם $a-1 \neq 0$ וגם

$$(a-1)(a-2) \neq 0$$

נקבל שיש לנו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד.
נטפל בשאר המקרים:

- $a = 1$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהיא בצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (y) ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

- $a = 2$- נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שיש בה שורת סתירה ולכן במקרה זה לא יהיה פתרון.

לסיכום: עבור $a \neq 1, 2$ יש פתרון יחיד. עבור $a = 2$ לא יהיה פתרון ועבור $a = 1$ יהיו אינסוף פתרונות.

(ב) עבור $a=1$, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת.

פתרון: ראינו שעבור $a=1$ נקבל את המערכת (שהיא כבר מדורגת)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהפתרון שלה הוא (אם נציב $y=t$)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ג) האם קיים ערך של a עבורו $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ פתרון למערכת? אם כן, מצאו אותו.

פתרון: נניח שכן. אזי מתקיים

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ -1 & -1 & 2-a \\ 2-a & 2a-a^2 & 0 \\ a & a^2 & 2a-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ -1 & -1 & 2-a \\ 2-a & 2a-a^2 & 0 \\ a & a^2 & 2a-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6-6a \\ -10+5a \\ a^2-3a+2 \\ -a^2-9a+1 \end{pmatrix}$$

נקבל מהקורדיאנטה הראשונה את השיוון $3-3a=1$ שפתרונה $a=\frac{2}{3}$. מהקורדינאטה השניה נקבל את השיוון $-5+\frac{5}{2}a=1$ שפתרונה $a=\frac{12}{5}$ ולכן אין a שמקיים את שתי השיוויות הנל ולכן לא קיים a כנדרש בשאלה.

3. נביט במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(א) מצאו בסיסים ומימדים למרחבים $C(A), R(A), N(A)$.

פתרון: נדרג את A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן: שורות שונות מאפס בצורה מדורגת

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מהווים בסיס ל $R(A)$ ומימדו 2.

עמודות במטריצה A, שבצורה מדורגת יש בהם איבר פותח (עמודות $1+2$),

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

מהוות בסיס ל $C(A)$ ומימדו 2.

לשם מציאת בסיס ל $N(A)$ נפתור את המערכת ההומוגנית, נציב $z=t$ ונקבל

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0.5t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל $N(A)$ ומימדו 1.

(ב) מצאו בסיס למרחב $C(A) \cap R(A)$.

פתרון: נעביר את המרחבים $C(A), R(A)$ לייצוג על ידי משוואות.

$C(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 2 & 2 & y \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 0 & -2 & y-x \\ 0 & -2 & z-2x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 0 & -2 & y-x \\ 0 & 0 & z-y-x \end{array}\right)$$

לכן

$$C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z-y-x=0 \right\}$$

:$R(A)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & y \\ 0 & 1 & z-x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & y \\ 0 & 0 & z+\frac{1}{2}y-x \end{array}\right)$$

לכן

$$R(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z + \frac{1}{2}y - x = 0 \right\}$$

כעת

$$C(A) \cap R(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{c} -x-y+z=0 \\ -x+\frac{1}{2}y+z=0 \end{array} \right\}$$

נפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{2}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נציב במשתנה החופשי $z = t$ ונקבל כי

$$C(A) \cap R(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל $C(A) \cap R(A)$.

4. נביט בזוג המישורים הנתונים באופן אלגברי

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y - z = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y + 2z = 1 \right\}$$

(א) מצאו בסיס ל U.

פתרון: נמצא בסיס על ידי פתירת מערכת המשוואות$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ שמייצת את U. נציב במשתנים החופשיים

$y=t, z=s$ ונקבל ש

$$U=\left\{\begin{pmatrix} s-t \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל U ומימדו 2.

(ב) מצאו את הפתרון הכללי של W (זו הצורה הפרמטרית של המישור).

פתרון: נמצא נפתור את מערכת המשוואות$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ שמייצת את W. נציב במשתנים החופשיים $y=t, z=s$ ונקבל ש

$$W=\left\{\begin{pmatrix} 1-2s+t \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(ג) האם W תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^3$?

פתרון: לא. וקטור האפס

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לא שייך ל W שהרי לא פותר את המשוואה $x-y+2z=1$ שמייצגת את W.

(ד) מצאו את החיתוך בין המישורים, $U\cap W$. הביעו אותו באופן פרמטרי.

פתרון: נקבל ש

$$U\cap W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{c} x+y-z=0 \\ x-y+2z=1 \end{array}\right\}$$

ונפתור את מערכת המשוואות$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ שמייצת את $U\cap W$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

נציב במשתנה החופשי $z=t$ ונקבל ש

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$