תרגול 9

17 בדצמבר 2015

<u>הגדרה</u>: הרכבת פונקציות:

תהיינה $f: A \to B, g: B \to C$ פונקציות. נגדיר את ההרכבה ביניהן להיות:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$g \circ f : A \to C$ היא פונקציה. (הסבר בדף שאביה העלה לאתר)

<u>הערה</u>: הרכבת פונקציות היא מקרה פרטי של הרכבת יחסים כמו שראינו בתרגול 7

<u>לדוגמה</u>:

אם נתבונן ב־f, g מהדוגמה הקודמת שלנו נקבל:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(6x-2) = (6x-2)^4 - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^4-1) = 6(x^4-1) - 2$$

שימו לב שהרכבה אינה קומוטטיבית, אינה חילופית - הסדר בה נרכיב פונקציות זו על זו משנה את התוצאה הסופית.

<u>תרגיל</u>:

תהיינה $f: A \to B, g: B \to C$ פונקציות כך שההרכבה $g \circ f$ חח"ע. האם f חח"ע? ומה לגבי g?

<u>פתרון:</u>

ההרכבה שלנו חח"ע, לכן אם $a_1 \neq a_2$ אז $g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2)$.

כעת, אם $a_1 \neq a_2$ אז $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$. אלא ש$-g$ היא פונקציה ולכן חד ערכית,

ולכן אם התמונות שונות המקורות שונים, כלומר:

$$g(f(a_1)) \neq g(f(a_2)) \to f(a_1) \neq f(a_2)$$

וסה"כ $a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)$ ולכן הפונקציה f חח"ע.

g לא בהכרח חח"ע. נתבונן למשל בקבוצות:

$$A = \{1\}, B = \{1,2\}, C = \{3\}$$

ונגדיר פונקציות:

$$f : A \to B, f(1) = 1$$

$$g : B \to C, g(1) = g(2) = 3$$

כעת, ההרכבה היא $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(1) = 3$ אכן חח"ע (יש רק מקור אחד אז

זה טריוויאלי) אך gלא חח"ע, כי $g(1) = g(2)$ אך $1 \neq 2$.

הגדרה:

תהי A קבוצה. **יחס הזהות** הוא יחס:

$$Id_A = \{(a,a) | a \in A\}$$

יחס הזהות הוא פונקציה.

פונקציה זו שולחת כל איבר ב$-A$ לעצמו, כלומר:

$$Id_A : A \to A, Id_A(a) = a$$

הגדרה:

נאמר שפונקציה $f : A \to B$ היא הפיכה, אם קיימת פונקציה $g : B \to A$ כך שמתקיים:

$$f \circ g = Id_B$$

$$g \circ f = Id_A$$

נסמן: $g = f^{-1}$ ונאמר ש$-g$ היא ההופכית של f (וכן $f = g^{-1}$ ו$-f$ היא ההופכית של g).

<u>משפט</u>: פונקציה היא הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל. שימו לב שכיוון אחד נובע משני התרגילים הקודמים שעשינו, כיוון שני - פשוט צריך לבנות את הפונקציה ההופכית. ראו תרגיל.

<u>דוגמה:</u>

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = 6x - 2$. בתרגול הקודם ראינו שהיא חח"ע ועל.

ההופכית שלה היא $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$g(x) = \frac{x+2}{6}$$

<u>הערה</u>: פונקציה היא הפיכה רק אם אפשר להפוך אותה "משני הצדדים", כמו שהגדרנו למעלה.

אם למשל נתבונן בפונקציות $f, g : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ המוגדרות ע"י:

$$f(n) = n + 1$$

$$g(n) = \begin{cases} n - 1 & n \neq 0 \\ 0 & 0 \end{cases}$$

נקבל שמתקיים: $g \circ f(n) = Id$ אך אם נרכיב הפוך כלל לא נקבל פונקציה על (ל-0 לא יהיה מקור).

<u>**הגדרה**</u>: תהי $f : X \to Y$ פונקציה, ותתי קבוצות $A \subseteq X, B \subseteq Y$. התמונה החלקית של A היא הקבוצה: $f(A) = \{y \in Y | \exists a \in A, f(a) = y\}$, שזה בעצם אוסף התמונות של איברים מ־A.

התמונה החלקית ההפוכה של B היא הקבוצה: $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$, שזה בעצם אוסף המקורות של איברים מ־B.

<u>תרגיל</u>:

תהי $f : X \to Y$ פונקציה, ותהי $A \subseteq X$. הוכח ש־ $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, ושקיים שיוויון אם f חח"ע.

<u>פיתרון</u>:

יהי $a \in A$. מתקיים ש־$f(a) \in f(A)$, ולכן $a \in f^{-1}(f(A))$.

נניח ש־ f חח"ע, ויהי $x \in f^{-1}(f(A))$, לכן $f(x) \in f(A)$ כלומר קיים $a \in A$ כך ש־$f(x) = f(a)$, כיון ש־f חח"ע נובע ש־$x = a \in A$.