תרגיל בית 9 -מתמטיקה בדידה

שאלה 1. תהי A קבוצה ו-R יחס על A. נסמן ב-$\operatorname{simc}(R)$ את היחס הסימטרי הקטן ביותר (ביחס להכלה) המכיל את R (הסגור הסימטרי של R). הוכיחו או הפריכו את הסעיפים הבאים:

(1) $\operatorname{simc}(R) = R \cup \{(b,a) \in A \times A \colon (a,b) \in R\}$

(2) הראו כי אם R הוא יחס סדר סימטרי אזי $trcl(R)$ הוא יחס סימטרי על A.

(3) אם $I(A) \subseteq R$, אזי $\operatorname{trcl}(S)$, כאשר $S = \operatorname{simc}(R)$, הוא היחס הטרנזיטיבי המינימלי (ביחס להכלה) המכיל את R.

פתרון.

(1) נסמן: $R' = R \cup \{(b,a) \in A \times A \colon (a,b) \in R\}$ ראשית נראה כי R' יחס סימטרי על A: יהי $a, b \in A$ כך ש- $(a,b) \in R'$ צריך להוכיח כי $(b,a) \in R'$ נניח בלי הגבלת הכלליות כי $(a,b) \in R$ (מקרה שני דומה). אזי לפי הגדרת R' נובע כי $(b,a) \in R'$ וסיימנו. נשאר להראות ש R' הוא היחס הסימטרי הקטן ביותר. לשם כך, יהי S יחס סימטרי המרחיב את R. אזי נשים לב כי עבור $(a,b) \in R$ מתקיים כי $(b,a) \in S$ כלומר: $\{(b,a) \in A \times A \colon (a,b) \in R\} \subseteq S$ ולכן, $R' \subseteq S$ כדרוש.

(2) יהי R יחס סימטרי על A , נראה כי $T = \operatorname{trcl}(R)$ יחס סימטרי על A. יהי $(a,b) \in T$ צריך להוכיח כי $(b,a) \in T$. נוכיח זאת באינדוקציה על R_n מהבנייה של T . כמובן כי $R_0 = R$ סימטרי. כעת נניח כי R_{n-1} סימטרי ונוכיח עבור R_n . יהי $(a,b) \in R_n$ אם $(a,b) \in R_{n-1}$ סיימנו מהנחת האינדוקציה. אחרת, קיים c כך ש- $(a,c),(c,b) \in R_{n-1}$ ומהנחת האינדוציה נקבל: $(c,a),(b,c) \in R_{n-1}$ ולכן מהגדרת R_n נובע כי: $(b,a) \in R_n$ כדרוש.

(3) הפרכה: נסתכל על

$$A = 3\,,\ R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(1,3)\}$$

אכן מתקיים $I(A) \subseteq R$. נחשב:

$$\operatorname{trcl}(R) = \{(0,0),(1,1),(2,2),(1,3)\}\,,\ \operatorname{simc}(R) = \{(0,0),(1,1),(2,2),(1,3),(3,1)\}$$

אבל $\operatorname{trcl}(\operatorname{simc}(R))$ הוא סימטרי היות ו $\operatorname{simc}(R)$ סימטרי בניגוד ל- $\operatorname{trcl}(R)$ ולכן אין שוויון.

שאלה 2. יהי $(L, \leq)$ קס"ח (במובן החלש). נניח כי כל תת-קבוצה A של L בעלת סופרימום, וכי ב-L יש איבר ראשון. הוכיחו כי הקס"ח $(L, \leq)$ סריג.

פתרון. תהי B תת-קבוצה מעוצמה 2 של L. ראשית נשים לב כי יש לה חסם-עליון לפי ההגדרה. כעת, נגדיר B' להיות קבוצת כל החסמים מלרע. נשים לב כי $B' \neq \emptyset$ היות והאיבר הראשון שייך ל- B'. נסתכל על $\sup(B')$ זהו חסם תחתון של B מהגדרת $\sup$.

שאלה 3. עבדו תחת אקסיומות ZFC . יהי $(L, \leq)$ סריג, הראו כי אם לכל שרשרת C ב-L יש חסם מלעיל, אזי ב-L יש מקסימום.

פתרון. יהי C שרשרת מקסימלית ב- L. נסמן ב-x את חסם המלעיל שלה (אפריורית יכולים להיות כמה). נשים לב כי $x = max(C)$ אחרת נגדיר $C' = C \cup \{x\}$ והגדלנו ממש את השרשרת. כעת נראה כי x איבר אחרון. יהי $y \in L$ אם $y \leq x$ סיימנו. אם $x \leq y$ שוב נגדיר $C' = C \cup \{y\}$ קיבלנו שרשרת, והגדלנו את C ממש בסתירה

למקסימליות. אחרת x,y לא מתייחסים אחד לשני, נגדיר $B=\{x,y\}$ ונסתכל על $z=\sup(B)$. מתקיים $x\leq z$ וגם $z\neq x$, ולכן שוב נוכל להרחיב את השרשרת C לשרשרת גדולה יותר, בסתירה.

שאלה 4. הראו כי הבאים שקולים:

(1) AC

(2) כל משפחה של קבוצות לא ריקות זרות בזוגות; $\langle A_i\colon i\in I\rangle$, קיימת קבוצה $B\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$ כך ש- $B\cap A_i$ הוא יחידון לכל $i\in I$.

פתרון.

"$(2)\Leftarrow(1)$" יהי $\langle A_i\colon i\in I\rangle$ משפחה של קבוצות, נבקש להראות כי $\prod_{i\in I}A_i\neq\emptyset$. נסתכל על $\langle A_i\times\{i\}\colon i\in I\rangle$ נשים לב כי זוהי משפחה של קבוצות זרות בזוגות ולכן לפי ההנחה קיימת B כך ש- $|\ B\cap A_i\times\{i\}\ |=1$ לכל $i\in I$. מכיוון ש- $B\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$ נקבל כי $B=\{(a_i,i)\colon a_i\in A_i\}$ כלומר, $B\in\prod_{i\in I}A_i$, כדרוש.

"$(1)\Leftarrow(2)$" יהי $\langle A_i\colon i\in I\rangle$ משפחה של קבוצות זרות בזוגות, נמצא קבוצה $B\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$ כך ש- $|\ B\cap A_i\ |=1$ לכל $i\in I$. מכיוון ש-$\prod_{i\in I}A_i\neq\emptyset$ קיים $B\in\prod_{i\in I}A_i$ מכיוון ש- $\langle A_i\colon i\in I\rangle$ זרות בזוגות נקבל כי לכל $j\neq i\in I$ עבור $(a_i,i),(a_j,j)\in B$, מתקיים: $a_i\neq a_j$. לכן אם נסתכל על $\mathrm{Im}(B)$ נקבל כי $\mathrm{Im}(B)\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$ וכי לכל $i\in I$ מתקבל: $|\ \mathrm{Im}(B)\cap A_i\ |=1$, כדרוש.

שאלה 5. נסתכל על הקס"ח $(\mathcal{W},\sqsubseteq)$. כאשר:

$$\mathcal{W}:=\{(A,R)\colon \text{R הוא סידור טוב של A}\}$$
$$(A_0,R_0)\sqsubseteq(A_1,R_1)\ \Leftrightarrow\ (A_0\subseteq A_1)\wedge(R_0\subseteq R_1)$$

(חשוב לציין כי אלה לא קבוצות אבל הניחו כי קיימת קבוצה אוניברסלית $\mathcal{U}$ בה הקס"חים מוכלים)
יהי C שרשרת בקס"ח $(\mathcal{W},\sqsubseteq)$. נסמן:

$$B:=\bigcup\{A\colon \exists R\,((A,R)\in C\}$$
$$S:=\bigcup\{R\colon \exists A\,((A,R)\in C\}$$

הוכיחו או הפריכו: S סידור טוב של B. במילים פשוטות: "האם איחוד של קבוצות סדורות היטב היא קבוצה סדורה היטב?".

פתרון.

הפרכה:

נסתכל על הקס"ח $(\mathbb{Q},\leq)$ תהי $\langle q_i\colon i\in\mathbb{N}\rangle$ מנייה של הרציונאלים (ראיתם כי $|\ \mathbb{Q}\ |=\aleph_0$). לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר:

$$A_n:=\{q_i\colon i\leq n\}\,,\ R_n=\leq\restriction(A_n\times A_n)$$

נשים לב כי לכל n טבעי הקס"ח (A_n,R_n) סדור היטב (למה?), ובנוסף לכל $n<m\in\mathbb{N}$ קל לראות כי:

$$(A_n,R_n)\sqsubseteq(A_m,R_m)$$

כלומר, $C=\{(A_n,R_n)\colon n\in\mathbb{N}\}$ היא שרשרת. אפשר לוודא כי מתקיים:

$$B=\mathbb{Q}\,,\ S=\leq$$

אבל ידוע כי $(\mathbb{Q},\leq)$ לא סדורה היטב (מצאו קבוצה ללא איבר-ראשון).