בוחן בדידה קיץ תשפ -פתרון

חלק א

- שאלה ראשונה: נתון $a=5$ ו $0<b\in\mathbb{R}$. נגדיר יחס שקילות R על $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ על ידי הכלל: $(x_1,y_1)\,R\,(x_2,y_2)$ אמ"מ

$$(y_1-b)(y_2-b)>0 \text{ וגם } (x_1-a)(x_2-a)>0$$

או

$$(x_1-a)(y_1-b)=0 \text{ וגם } (x_2-a)(y_2-b)=0$$

אין צורך להוכיח כי R יחס שקילות. כמו כן, נתון כי שתי הנקודות הבאות נמצאות במחלקות שקילות שונות.

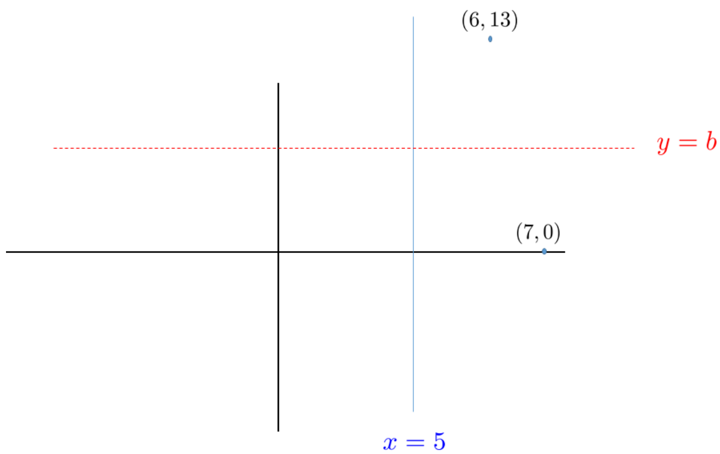
$$(6,13)\,,(7,0)$$

1. מצאו נקודה $(x,y)\in\left[(0,0)\right]_R$ כך ש $(x,y)\neq(0,0)$.

2. כתבו את את כל מחלקות השקילות השונות בעזרת נציגים. כלומר משהו בצורה $\left\{\left[(c_1,d_1)\right]_R,\left[(c_2,d_2)\right]_R\ldots\right\}$ (כאשר עליכם למצוא את $(c_1,d_1)\,,(c_2,d_2)\,,\ldots$ וכאשר כל המחלקות בקבוצה שונות זו מזו).

פתרון: נתחיל בשורה התחתונה - היחס R מחלק לנו את המישור $\mathbb{R}^2$ ל 4 רבעים "חדשים" כמו בציור מספר 1 .

איור 1: הצגה ויזואלית של היחס R



למה? בואו נחקור את היחס לפרטים. יהיו $(x_1,y_1)\,,(x_2,y_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ כך ש $(x_1,y_1)\,R\,(x_2,y_2)$ אזי

$$(y_1-b)(y_2-b)>0 \text{ וגם } (x_1-a)(x_2-a)>0$$

או

$$(x_1-a)(y_1-b)=0 \text{ וגם } (x_2-a)(y_2-b)=0$$

ולכן או שהתנאי $(y_1-b)(y_2-b)>0$ וגם $(x_1-a)(x_2-a)>0$ מתקיים או שהתנאי $(x_1-a)(y_1-b)=0$ וגם $(x_2-a)(y_2-b)=0$ מתקיים.

- אם התנאי $(y_1-b)(y_2-b)>0$ וגם $(x_1-a)(x_2-a)>0$ מתקיים אזי x_1,x_2שניהם נמצאים מימין לציר $x=a$ או ששניהם נמצאים משמאל לציר $x=a$ מכיוון שאם אחד מהם מצד שמאל ואחד מצד ימין נקבל כי $(x_1-a)(x_2-a)<0$ שהרי זה מכפלה של מספר חיובי במספר שלילי (לא יכול להיות שאחד מהם שווה ל a כיוון שאז נקבל שהמכפלה $(x_1-a)(x_2-a)=0$). באותו אופן y_1,y_2 שניהם נמצאים מתחת לציר $y=b$ או ששניהם נמצאים מעל הציר $y=b$. ולכן שתי הנקודות $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ נמצאו באותו "רביע" (כאשר "הצירים" החדשים הם $y=b$ ו $x=a$, וראשית הצירים בנקודה (a,b))
- אם התנאי $(x_1-a)(y_1-b)=0$ וגם $(x_2-a)(y_2-b)=0$ מתקיים אזי: $(x_2=a)\vee(y_2=b)$ וגם $(x_1=a)\vee(y_1=b)$. כלומר במקרה זה שתי הנקודות $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ נמצאות על הצירים.

כעת, נשים לב שהנקודות הנתונת בשאלה $(7,0),(6,13)$ מקיימות שרכיב x שלהם (6 ב $(6,13)$ ו7 ב $(7,0)$) נמצאים מימין לציר $x=a$ (כי $a=5$). בנוסף נתון שהם במחלקות שקילות שונות ולכן הציר $y=b$ צריך להפריד בניהם ולכן נסיק כי $0<b\leq 13$ (נתון ש $0<b$ ובנוסף אם b היה גדול ממש מ13 היינו מקבלים ש $(6,13)\,R\,(7,0)$ בסתירה לנתון שהם במחלקות שקילות שונות).

ולפתרון השאלה אחרי ההקדמה הזאת:

(א) טענה: $(0,-1)\in[(0,0)]_R$. הוכחה: נראה כי $(0,0)\,R\,(0,-1)$. אכן , מתקיים כי $(0-a)(0-a)=a^2=25>0$ וגם $(-1-b)(0-b)=b^2+b>0$.

(ב) טענה: $(0,-1),(0,14),(6,-1),(6,14),(5,0)$ נציגים של מחלקות שקילות שונות זו מזו ובנוסף אלו כל מחלקות השקילות. הוכחה: מציבים בהגדת היחס R ורואים שאף אחת מהנקודות לא מתייחסת לאף נקודה אחרת ואלו נציגים של כל מחלקות השקילות כי:

- הנקודות שמתייחסות ל $(0,-1)$ אלו הנקודות (x,y) המקיימות ש $x<5, y<b$,
- הנקודות שמתייחסות ל $(0,14)$ אלו הנקודות (x,y) המקיימות ש $x<5, y>b$,
- הנקודות שמתייחסות ל $(6,-1)$ אלו הנקודות (x,y) המקיימות ש $x>5, y<b$,
- הנקודות שמתייחסות ל $(6,14)$ אלו הנקודות (x,y) המקיימות ש $x>5, y>b$,
- הנקודות שמתייחסות ל $(5,0)$ אלו הנקודות (x,y) המקיימות ש $x=5$ או $y=b$.

- שאלה שניה: קבעו והוכיחו לכל אחד מהפסוקים הבאים האם הוא בעל ערך True או False

1. $\forall y\in\mathbb{R}\exists x\in\mathbb{R}\,:\,\left(x^2+6x+5>y\right)$
פתרון: פסוק זה נכון. הוכחה: יהא y ממשי וצריך למצוא x ממשי כך ש $x^2+6x+5>y$. אכן ניתן למצוא x כזה מכיוון שהפרבולה x^2+6x+5 "צוחקת" ולכן ככל שנגדיל את x הערך x^2+6x+5 יגדל ובפרט בשלב מסוים יהיה גדול מ y

2. $\forall x_1\in\mathbb{R}\exists x_2\in\mathbb{R}\,:\,\left(x_1^2+6x_1+5=x_2^2-12x_2+42\right)$
פתרון: פסוק זה לא נכון. הוכחה: $x_1=\frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{2}$ ונקבל כי $x_1^2+6x_1+5=0$ ועבור ערך x_1זה לא קיים x_2 ממשי כך ש $x_1^2+6x_1+5=x_2^2-12x_2+42$ מכיוון שלכל x_2 מתקיים כי $x_2^2-12x_2+42\neq 0$ שהרי אין פתרון לנוסחת השורשים

$$\frac{12\pm\sqrt{144-4\cdot 42}}{2}$$

שהרי בממשיים אין שורש למספר שלילי.

3. $\forall x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} : (x_1 \neq x_2) \rightarrow \left(x_1^2 + 6x_1 + 5 \neq x_2^2 - 12x_2 + 42\right)$
פתרון: פסוק זה לא נכון. הוכחה: שני הפרבלות $x_1^2 + 6x_1 + 5, x_2^2 - 12x_2 + 42$ צוחקות ולכן יש בינהם חיתוך. כלומר קיים x כך ש
$$x^2 + 6x + 5 = x^2 - 12x + 42$$
אבל אז נבחר $x_1 = x$ ו $x_2 = -x$ (אלו נקודות שונות שהרי $x \neq 0$ תציבו ותראו ש 0 לא מקיים את השיוויון) ונקבל כי $x_2 \neq x_1$ אבל $x_1^2 + 6x_1 + 5 = x_2^2 - 12x_2 + 42$.

חלק ב

- שאלה שלישית: יהא R יחס על קבוצה A ויהי יחס ההרכבה

$$R \circ R = \{(a, b) \mid \exists c : (aRc) \wedge (cRb)\}$$

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם R יחס סימטרי אז גם $(A \times A) \setminus R$ יחס סימטרי.
פתרון: הוכחה: צ"ל $(A \times A) \setminus R$ סימטרי. יהיו x, y כך ש $(x, y) \in (A \times A) \setminus R$ ונוכיח כי $(y, x) \in (A \times A) \setminus R$. אכן מכיוון ש $(x, y) \in (A \times A) \setminus R$ נקבל כי $(x, y) \in (A \times A)$ וגם $(x, y) \notin R$. כיוון שההנחה היא שRסימטרי נקבל כי $(y, x) \notin R$ (שהרי אם $(y, x) \in R$ מסימטריות R נקבל כי $(x, y) \in R$ ונקבל סתירה) ולכן $(y, x) \notin R$ ובנוסף $(y, x) \in A \times A$ (כי $x, y \in A$) ולכן נקבל כי $(y, x) \in (A \times A) \setminus R$ כנדרש.

2. אם R יחס אנטי-סימטרי אז גם $(A \times A) \setminus R$ יחס אנטי-סימטרי.
פתרון: הפרכה: למשל $A = \{1, 2\}$ ו $R = \emptyset$ אזי R אנטי סימטרי אבל $(A \times A) \setminus R = (A \times A)$ שאינו אנטי סימטרי (גם $(1, 2)$ וגם $(2, 1)$שייך ל $(A \times A) \setminus R$).
שימו לב שזה לא נכון להגיד שהטענה תמיד לא מתקיימת. למשל עבור $A = \{1, 2\}$ ו $R = \{(1, 2)\}$ מתקיים כי R אנטי-סימטרי וגם
$$(A \times A) \setminus R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 1)\}$$
אנטי סימטרי.

3. אם R יחס סימטרי אז גם $R \circ R$ יחס סימטרי.
פתרון: הוכחה: צ"ל $R \circ R$ סימטרי. יהיו x, y כך ש $(x, y) \in R \circ R$ ונוכיח כי $(y, x) \in R \circ R$. אכן מכיוון ש $(x, y) \in R \circ R$ נקבל כי קיים c כך ש $(x, c), (c, y) \in R$ ומכיוון שההנחה היא שRסימטרי נקבל כי $(c, x), (y, c) \in R$ ולכן $(y, x) \in R \circ R$ לפי הגדרה, כנדרש.

4. אם R יחס אנטי-סימטרי אז גם $R \circ R$ יחס אנטי-סימטרי .
פתרון: הפרכה: למשל $A = \{1, 2, 3, 11\}$ ו $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 11), (11, 1)\}$ אזי R אנטי סימטרי אבל $(1, 3), (3, 1) \in R \circ R$ (הזוג $(1, 3)$ נמצא ב $R \circ R$ ויעיד עליו $c = 2$. הזוג $(3, 1)$ נמצא ב $R \circ R$ ויעיד עליו $c = 11$) ולכן $R \circ R$ אינו אנטי סימטרי .
שימו לב שזה לא נכון להגיד שהטענה תמיד לא מתקיימת. למשל עבור $A = \{1, 2\}$ ו $R = \{(1, 2)\}$ מתקיים כי R אנטי- סימטרי וגם
$$R \circ R = \emptyset$$
אנטי- סימטרי.

במידה ותבחרו להגיש את השאלה השלישית לבדיקה, ייתכן שתוזמנו לשיחת זום קצרה על המבחן (כתבו במקרה זה "עניתי על השאלה השלישית").

במידה ותבחרו לא להגיש את השאלה השלישית לבדיקה, תקבלו עליה 15 נקודות אוטומטית. (כתבו במקרה זה "לא עניתי על השאלה השלישית").