1. יהיו $a=(2,3,-1)$ $b=(0,4,0.5)$ $c=(6,1,-4)$

I. חשבו את הזווית בין a ו b

II. חשבו את שטח של המקבילית הנוצרת ע"י c ו b

III. הראו ש a,b,c נמצאים באותו המישור

1. יהיו $a=(2,3,-1), b=(0,4,0.5), c=(6,1,-4)$

א. חשב את הזווית בין a ו b

$$\langle a,b\rangle = 2\cdot 0+3\cdot 4+0.5\cdot -1 = 11.5,\ \|a\| = \sqrt{4+9+1}=\sqrt{14},$$

ו- $\|b\| = \sqrt{0+16+0.25}=\sqrt{16.25}=\frac{\sqrt{65}}{2}$ $\quad \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|} = \frac{11.5}{\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{65}}{2}} = \frac{23}{\sqrt{910}} = \sqrt{\frac{529}{910}}$

חישבתי $\arccos\sqrt{\frac{529}{910}}$ במחשבון ~ 40.32 מעלות או ~ 0.7037 רדיאנים

ב. חשב את שטח של המקבילית הנוצרת ע"י c ו- b.

למדנו נוסחא שלטח המקבילית הזאת, $\|b\times c\|$.

$$b\times c = (4\cdot(-4)-0.5\cdot 1, 0.5\cdot 6-(-4)\cdot 0, 0\cdot 1-4\cdot 1) = (-16.5, 3, -4)$$

$$\|b\times c\| = \sqrt{272.25+9+16=297.25}\sim 17.24$$

ג. הראה ש a, b ו- c נמצאים באותו המישור.

$$\det\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & 0.5\\ 6 & 1 & -4\end{pmatrix} = 6\det\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 0.5\end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0.5\end{pmatrix} + (-4)\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$
$$= 6\cdot 5.5 - 1\cdot 1 - 4\cdot 8 = 33-1-32 = 0$$

הדטרמיננטה שווה 0 אם ורק אם הוקטורים תלויים ליניארית (ששקול לכך שהם באותו מישור)

2. יהיו a,b,c,d וקטורים ב- R^3. הוכיחו את הזהויות הבאות:

I. $a\times(b\times c) = (a\cdot c)b-(a\cdot b)c$

II. $(a\times b)\cdot(c\times d) = (a\cdot c)(b\cdot d)-(a\cdot d)(b\cdot c)$

פתרון: משתמשים בהגדרות של מ"פ ומכפלה וקטורית, ומפשטים את שני הצדדים.

א.

נסמן $a=(a_1,a_2,a_3)$ וכדומה. ו- $b\times c = (b_2c_3-b_3c_2, b_3c_1-b_1c_3, b_1c_2-b_2c_1)$

$$\begin{aligned}
a\times(b\times c) &= \big(a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3), a_3(b_2c_3-b_3c_2)\\
&\quad - a_1(b_1c_2-b_2c_1), a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)\big)\\
&= (a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3, a_3b_2c_3-a_3b_3c_2-a_1b_1c_2\\
&\quad + a_1b_2c_1, a_1b_3c_1-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3+a_2b_3c_2)\\
&= \big(b_1(a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_2b_2+a_3b_3), b_2(a_1c_1+a_3c_3)\\
&\quad - c_2(a_1b_1+a_3b_3), b_3(a_1c_1+a_2c_2)-c_3(a_1b_1+a_2b_2)\big)\\
&= \#\big(b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\\
&\quad - c_1(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3), b_2(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\\
&\quad - c_2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3), b_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\\
&\quad - c_3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\big)\\
&= (b_1\langle a,c\rangle - c_1\langle a,b\rangle, b_2\langle a,c\rangle - c_2\langle a,b\rangle, b_3\langle a,c\rangle - c_3\langle a,b\rangle)\\
&= \langle a,c\rangle b - \langle a,b\rangle c
\end{aligned}$$

ב.

ב. $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle$

$$\begin{aligned}\langle a \times b, c \times d\rangle &= \langle (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1), (c_2d_3 - c_3d_2, c_3d_1 \\ &\quad - c_1d_3, c_1d_2 - c_2d_1)\rangle \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)(c_2d_3 - c_3d_2) + (a_3b_1 - a_1b_3)(c_3d_1 - c_1d_3) \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1) \\ &= a_2b_3c_2d_3 + a_3b_2c_3d_2 - a_2b_3c_3d_2 + a_3b_2c_2d_3 + \cdots \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{3} a_ic_ib_jd_j - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{3} a_id_ib_jc_j = \# \sum_{i,j=1}^{3} a_ic_ib_jd_j - \sum_{i,j=1}^{3} a_id_ib_jc_j \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_ic_i \sum_{j=1}^{3} b_jd_j - \sum_{i=1}^{3} a_id_i \sum_{j=1}^{3} b_jc_j = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle\end{aligned}$$

3. יהיו a,b שני ווקטורים אורתונורמליים ב-R^3. הראו ש:

I. הווקטורים $a,b,a\times b$ מהווים בסיס אורתונורמלי ב-R^3

II. $(a\times b)\times a = b$, $(a\times b)\times b = -a$ והסבירו את המשמעות הגיאומטרית

פתרון:

3. יהיו a, b שני ווקטורים אורתונורמליים ב-$\mathbb{R}^3$. הראה ש:

א. הווקטורים $a, b, a \times b$ מהווים בסיס אורתונורמלי ב-$\mathbb{R}^3$

אורטוגונליות:

$a \perp b$ כי a, b אורתונורמלים. לפי תכונות מכפלה וקטורית תמיד $a \times b \perp b$ ו-$a \times b \perp a$

נורמליות:

$\|a\| = \|b\| = 1$ כי a, b אורתונורמלים, למדנו ש- $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\theta$ כאשר θ היא הזווית בין a ל- b. בגלל ש- $a \perp b$ הזווית הזאת היא $90°$ ולכן $\|a \times b\| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90° = 1$.

ב. $(a \times b) \times a = b$, $(a \times b) \times b = -a$ והסבר את המשמעות הגיאומטרית.

לפי א'.2 $(a \times b) \times a = -a \times (a \times b) = -(\langle a, b\rangle a - \langle a, a\rangle b) = -(0 \cdot a - 1 \cdot b) = b$ ו-$(a \times b) \times b = -b \times (a \times b) = -(\langle b, b\rangle a - \langle b, a\rangle b) = -(1 \cdot a - 0 \cdot b) = -a$.

מבחינת המשמעות הגיאומטרית, גילינו ב-א' ש- $\{a, b, a \times b\}$ בסיס אורתונורמלי, אבל מכך נובע שהזוגות $\{a, a \times b\}$ ו- $\{b, a \times b\}$ גם אורתונורמליים.

לכן $(a\times b)\times a$ ניצב ל $a,(a\times b)$ ואורכו כשטח המקבילית ביניהם (אורך 1) – יש רק שתי אפשרויות לוקטור כזה $\pm b$, וכלל יד ימין קובע את הסימן. כנ"ל לגבי $(a\times b)\times b$