# תרגיל 11: התמרת פורייה המהירה (FFT)

**<u>תזכורת</u>**

בהינתן שני פולינומים מדרגה חסומה ע"י $n$ $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$ ו- $B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}$, אנו מעוניינים לחשב את $C(x)=A(x)\cdot B(x)$.

כלומר, בהינתן וקטורי המקדמים $a=(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})$ ו- $b=(b_0,b_1,\ldots,b_{n-1})$ אנו מעוניינים לחשב את $c=(c_0,c_1,\ldots,c_{2n-1})$ כך ש: $c_j=\sum_{k=0}^{j}a_kb_{j-k}$. פעולה זו נקראת **קונבולוציה** ומסומנת $c=a\otimes b$ (ולעיתים $c=a*b$).

ניתן לתאר את דרך חישוב $c_j$ באופן גרפי: רושמים את הוקטור $a$ ומתחתיו את הוקטור $b$ מהסוף להתחלה, כך ש- $a_j$ נמצא מעל $b_0$. כופלים כל זוג מקדמים באותה עמודה וסוכמים.

דוגמא: על מנת לחשב את $c_3$ נרשום:

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n-1} \\ b_{n-1} & \ldots & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & & \end{array}$$

ואכן $c_3=a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0$.

ניתן לבצע קונבולוציה ב- $O(n\log n)$ כך: $a\otimes b=\mathrm{DFT}^{-1}(\mathrm{DFT}(a)\cdot\mathrm{DFT}(b))$

(DFT היא התמרת פורייה הדיסקרטית הממומשת באמצעות אלגוריתם FFT. גם ההתמרה הדיסקרטית ההפוכה ממומשת באמצעות FFT)

**<u>תרגיל 1</u>**

מטריצת **טופליץ** היא מטריצה בגודל $n\times n$ המקיימת $a_{i,j}=a_{i-1,j-1}$ לכל $i\neq 1, j\neq 1$:

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-2} & a_{2n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & & a_{2n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_n & a_{n+1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

א. האם סכום של 2 מטריצות טופליץ הוא מטריצת טופליץ?

ב. האם מכפלה של 2 מטריצות טופליץ היא מטריצת טופליץ?

ג. תארו ייצוג של מטריצות טופליץ המאפשר חיבור של 2 מטריצות טופליץ $n\times n$ בזמן $O(n)$.

ד. הציעו אלגוריתם הכופל מטריצת טופליץ בגודל $n\times n$ בוקטור באורך $n$ בזמן $O(n\log n)$.

ה. הציעו אלגוריתם יעיל לכפל 2 מטריצות טופליץ בגודל $n\times n$. נתחו סיבוכיות.

**<u>פתרון:</u>**

א. התשובה היא כן. בהינתן 2 מטריצות טופליץ $A$ ו- $B$, מתקיים לכל $i \neq 1, j \neq 1$ :

$$\left[A+B\right]_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} = a_{i-1,j-1} + b_{i-1,j-1} = \left[A+B\right]_{i-1,j-1}$$

ב. התשובה היא לא.

דוגמא נגדית : $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 27 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$.

ג. נייצג מטריצת טופליץ ע"י וקטור בגודל $2n$ כאשר הקואורדינאטה ה- $i$ בוקטור מתארת את האיבר על האלכסון ה- $i$ במטריצה (מתחילים לספור מהפינה הימנית-העליונה). חיבור 2 מטריצות טופליץ בייצוג זה הוא פשוט חיבור וקטורים המייצגים של המטריצות.

ד. תהא $A$ מטריצת טופליץ $n \times n$ ויהא $x = \left[x_0, x_1, ..., x_{n-1}\right]$ וקטור. אזי :

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 \\ \vdots & a_n & & & a_2 \\ & & & & \vdots \\ a_{2n-2} & & & a_n & a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} x_k a_{n-1-k} \\ \sum_{k=0}^{n-1} x_k a_{n-k} \\ \sum_{k=0}^{n-1} x_k a_{n+1-k} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} x_k a_{n-1+j-k} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} x_k a_{2n-2-k} \end{bmatrix}$$

כעת נסתכל על הקונבולוציה של הוקטור המייצג את $A$ (לפי ג') $a = \left[a_0, a_1, ..., a_{2n-2}\right]$ עם הוקטור $x' = \left[x_0, x_1, ..., x_{n-1}, 0, 0, ..., 0\right]$ שאורכו $2n-1$ :

$$(x' \otimes a)_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x'_k \, a_{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k a_{n-1-k}$$

$$(x' \otimes a)_n = \sum_{k=0}^{n} x'_k \, a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k a_{n-k}$$ (מאחר ו- $x'_n = 0$)

ובאופן כללי $(x' \otimes a)_{n-1+j} = \sum_{k=0}^{n-1+j} x'_k \, a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k a_{n-1+j-k}$ לכל $j = 0,1,...,n-1$, כלומר קיבלנו בדיוק את אברי הוקטור $A \cdot x$.

מסקנה : ניתן לבצע מכפלה של מטריצת טופליץ $n \times n$ בוקטור באורך $n$ בזמן $O(n \log n)$.

ה. יש למצא דרך יעילה לכפול 2 מטריצות טופליץ $A$ ו- $B$. כפל מטריצות נאיבי לוקח $O\left(n^3\right)$ .

נרשום את $B$ כמטריצה של עמודות. העמודה ה-$i$ של $B$ תסומן ב-$b_i$. כלומר,

$$B=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

נשים לב כי ניתן לרשום את המכפלה של $A$ עם $B$ כ-$n$ מכפלות של $A$ עם עמודה של $B$: $AB=\left[Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n\right]$. ע"י שימוש בסעיף ד', ניתן לבצע כל מכפלה כזו ב-$O\left(n\log n\right)$ זמן. בסה"כ יש לבצע $n$ מכפלות ולכן הסיבוכיות הכוללת היא $O\left(n^2\log n\right)$ - שיפור משמעותי ביחס לשיטה הנאיבית.

## **<u>תרגיל 2</u>**

נתונות שתי מחרוזות מעל הא"ב $\{1,-1\}$: $Y=\{y_0,\dots,y_{n-1}\}$ ו-$X=\{x_0,\dots,x_{m-1}\}$, כאשר $m<n$. אנו מעוניינים לדעת <u>לכל</u> $i$, $0\le i\le n-m$, מהו מספר האותיות הזהות בין המחרוזות $X$ ותת-המחרוזת $Y_i=\{y_i, y_{i+1},\dots,y_{i+m-1}\}$. כלומר, רוצים לדעת לכל $i$, $0\le i\le n-m$, מהו גודל הקבוצה $\left\{j \middle| y_{i+j}=x_j \wedge 0\le j\le m-1\right\}$.

לדוגמא: עבור $X=\{1,-1,1,1,-1\}$ ו-$Y=\{-1,1,-1,1,-1,-1,-1\}$ הפתרון הוא $\{2,4,1\}$.

**פיתרון:**

הפעולה המתוארת דומה מאוד לתיאור הגרפי של קונבולציה.

נגדיר וקטור חדש $X'=[x_{m-1},x_{m-2},...,x_1,x_0,0,0,...,0]$ באורך $n$ ונסתכל על $Y\otimes X'$ :

$$\left[Y\otimes X'\right]_{m-1}=\sum_{k=0}^{m-1}Y_k X'_{m-1-k}=\sum_{k=0}^{m-1}y_k x_k$$

$\left[Y\otimes X'\right]_m=\sum_{k=0}^{m}Y_k X'_{m-k}=\sum_{k=1}^{m}Y_k X'_{m-k}=\sum_{k=0}^{m-1}y_{k+1}x_k$ (השיוויון האמצעי מתקיים כי $X'_m=0$).

ובאופן כללי $\left[Y\otimes X'\right]_{m-1+j}=\sum_{k=0}^{m-1}y_{k+j}x_k$ לכל $j=0,1,...,n-m$ .

אם $y_{k+j}=x_k$ אז מכפלתם תורמת לסכום 1, אחרת היא תורמת $-1$. לכן המשמעות של $\left[Y\otimes X'\right]_{m-1+j}=\sum_{k=0}^{m-1}y_{k+j}x_k$ היא ההפרש בין מספר ההתאמות למספר אי-ההתאמות בין המחרוזת $X$ לתת-המחרוזת $Y_j=\{y_j,y_{j+1},...,y_{j+m-1}\}$. נסמן את מספר ההתאמות ב- $t$ (זה הערך שמעניין אותנו) ואת מספר אי-ההתאמות ב- $s$. אזי $\left[Y\otimes X'\right]_{m-1+j}=t-s$, כמו כן $t+s=m$, לכן הערך המבוקש במקום ה- $j$ הוא $\frac{\left[Y\otimes X'\right]_{m-1+j}+m}{2}$.

סיבוכיות האלגוריתם היא כמובן $O(n\log n)$.