

מבחן מועד ב' באלגברה לינארית 83-110-06

מרצה: דר' שפרה רייף

מתרגל: תומר ירון

משך המבחן: שלוש שעות

לפניך 5 שאלות. תשובה נכונה מקנה את מספר הנקודות הרשום לידה. ניתן להשתמש במחשבון.

**שאלה 1. תהי**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) (6 נקודות) מצא/י את הערכים העצמיים של  $A$ .

(2) (6 נקודות) תהי  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  מוגדרת על ידי  $T(\vec{v}) = A\vec{v} - 5\vec{v}$ . הוכח/י ש  $T$  העתקה לינארית.

(3) (6 נקודות) האם  $T$  הפיכה? נמק/י.

**שאלה 2. (1) (9 נקודות)** יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית עם בסיס אורתונורמלי  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ . יהי  $W \subset V$

מוגדר על ידי  $W = \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$  עבור  $k \leq n$ . הוכח שלכל  $\vec{v} \in V$ , הוקטור

$$\vec{u} = \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 - \dots - \langle \vec{v}, \vec{v}_k \rangle \vec{v}_k$$

שייך ל  $W^\perp$ .

(2) (9 נקודות) מצא/י בסיס אורתונורמלי ל

$$\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$$

**שאלה 3.** יהיו  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מטריצות הפיכות.

(1) (5 נקודות) הוכח/י שהמטריצה  $AB$  והמטריצה  $BA$  דומות.

(2) (8 נקודות) הוכח/י ש

$$\det(\text{adj} A) = (\det A)^{n-1}$$

(3) (5 נקודות) תהי  $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$  כך ש  $\det C = n$ . האם בהכרח  $\text{rank} C = n$ ? הסבר/י.

**שאלה 4.** (1) (9 נקודות) יהי  $V$  מרחב וקטורי ו  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$  קבוצת וקטורים בלתי תלויה לינארית. יהי  $\vec{w} \in V$  כך ש  $\vec{w} \notin \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ . הוכחי/י ש  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}\}$  גם בלתי תלויה לינארית.

(2) (9 נקודות) תהי  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$  מטריצה (לא ריבועית) כך ש  $\text{Null}(A) = \{\vec{0}\}$ . יהי  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$  כך ש  $A\vec{v} = A\vec{w}$ . הוכחי/י ש  $\vec{v} = \vec{w}$ .

**שאלה 5.** קבעי/י אם המשפטים הבאים נכונים או לא נכונים. הוכיחי/י את המשפטים הנכונים והפריכי/י את המשפטים שאינם נכונים על ידי דוגמה נגדית.

(1) (7 נקודות) מטריצה ריבועית היא הפיכה אם ורק אם 0 אינו ערך עצמי שלה.

(2) (7 נקודות) אם למערכת משוואות לינארית יש אינסוף פתרונות אז למטריצה המורחבת של המערכת יש שורת אפסים.

(3) (7 נקודות) יהי  $V$  מרחב וקטורי עם בסיס  $B$  ו  $\vec{v}, \vec{w} \in V$ . אם  $[\vec{v}]_B = [\vec{w}]_B$  אזי  $\vec{v} = \vec{w}$ .

(4) (7 נקודות) הקבוצה

$$V := \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid \det A = 0\}$$

היא תת-מרחב וקטורי של  $\mathbb{F}^{n \times n}$ .