תרגול 12 אינפי 1

12 בינואר 2021

1 רציפות במ"ש

נאמר ש-f רציפה במ"ש בקבוצה A אם:

- לכל שתי סדרות $a_n, b_n \in A$ כך ש- $a_n - b_n \to 0$ מתקיים: $f(a_n) - f(b_n) \to 0$.
- $$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in A : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

תרגילים:

1. בדקו רציפות במ"ש של $f(x) = x^2$ בקטע (a, b).

פתרון: נוכיח רציפות במ"ש: תהיינה $a_n, b_n \in (a, b)$ כך ש- $a_n - b_n \to 0$, ואז:

$$f(a_n) - f(b_n) = a_n^2 - b_n^2 = (a_n - b_n)(a_n + b_n)$$

נקבל אפסית (מהנתון שההפרש שואף ל0) כפול חסומה ($2a \leq a_n + b_n \leq 2b$) ולכן שואף לאפס.

עם ההגדרה השנייה: יהי $\epsilon > 0$ צריך למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in (a, b)$ נקבל:

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |x_1^2 - x_2^2| < \epsilon$$

נשים לב:

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| \leq |x_1 - x_2| \cdot 2\max\{|a|, |b|\} < \epsilon$$

לכן עבור $\delta = \frac{\epsilon}{2\max\{|a|,|b|\}}$ נקבל שאם $|x_1 - x_2| < \delta$ אז :

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| \leq |x_1 - x_2| \cdot 2\max\{|a|, |b|\} < \delta \cdot 2\max\{|a|, |b|\} = \epsilon$$

2. בדקו רציפות במ"ש של $f(x)=\sin\sqrt{x}$ בקטע $[0,\infty)$.

פתרון: תהיינה $a_n-b_n\to 0$ אז:

$$f(a_n)-f(b_n)=\sin\sqrt{a_n}-\sin\sqrt{b_n}=2\sin\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{2}\cos\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}{2}$$

נשים לב (שכאשר $a_n,b_n\neq 0$, ובמקרים ששווים אז מקבלים אוטומטית 0):

$$\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}=\frac{a_n-b_n}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}$$

אם $\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}\to 0$ אז $\sqrt{a_n},\sqrt{b_n}\to 0$ ולכן גם $\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\to 0$. אחרת נקבל שמהעובדה $a_n-b_n\to 0$ נקבל ש־

$$\frac{a_n-b_n}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}$$

היא אפסית כפול חסומה או אפסית כפול אפסית, ובכל מקרה שואפת ל0. ולכן

$$\sin\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{2}\to 0$$

ואז

$$2\sin\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{2}\cos\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}{2}$$

אפסית כפול חסומה.

3. האם $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במ"ש בקטע $[0,1]$?

כן, כי רציפה בקטע סגור, רציפה בו במ"ש (משפט קנטור). שאלה: מה לגבי הקטע $(0,\infty)$?

4. בדקו עבור $f(x)=x\sin x$ בקטע $[0,\infty)$.

פתרון: נמצא סדרות $a_n-b_n\to 0$ אבל $f(a_n)-f(b_n)\not\to 0$. למשל:

$$a_n=2\pi n+\frac{1}{n},b_n=2\pi n$$

ואז:

$$a_n-b_n=\frac{1}{n}\to 0$$

אבל:

$$f(a_n)-f(b_n)=\left(2\pi n+\frac{1}{n}\right)\sin\left(2\pi n+\frac{1}{n}\right)-2\pi n\sin 2\pi n=$$

$$=2\pi n\sin\left(2\pi n+\frac{1}{n}\right)+\underbrace{\frac{1}{n}\sin\left(2\pi n+\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}=2\pi n\sin\frac{1}{n}=2\pi\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to 2\pi$$

ולכן לא רציפה במ"ש.

5. תהי f רציפה ב־ $[a,\infty)$ כך שקיים וסופי $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. הוכיחו שהיא רציפה במ"ש ב־ $[a,\infty)$.

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. מהעובדה $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ נקבל שיש $M > a$ כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$. בנוסף, f רציפה במ"ש בקטע הסגור $[a, M+1]$ לפי קנטור, ולכן אם $x_1, x_2 \in [a, M+1]$ אז יש δ כך ש־

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

כעת, יהיו $x_1, x_2 \in [a,\infty)$. ניקח $\delta' = \min\{\delta, 1\}$. לכן אם $|x_1 - x_2| < \delta'$ אז:

$$x_1, x_2 \in [a, M+1] \vee x_1, x_2 > M$$

כי אם (בה"כ) $x_1 > M+1 \wedge x_2 \leq M$ אז $|x_1 - x_2| = x_1 - x_2 > M+1-M = 1$ אבל נתון $|x_1 - x_2| < \delta' \leq 1$. נחלק למקרים:

אם $x_1, x_2 \in [a, M+1]$ אז מהעובדה $|x_1 - x_2| < \delta' \leq \delta$ וההתכנסות במ"ש בקטע הסגור נקבל:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

אם $x_1, x_2 > M$ אז:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - L + L - f(x_2)| \leq |f(x_1) - L| + |L - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

6. $f(x) = \ln x$ ב $(0,\infty)$.

לא. ניקח סדרות:

$$a_n = e^{-n}$$

$$b_n = e^{-2n}$$

נקבל:

$$a_n - b_n \to 0$$

כסכום סדרות שואפות ל0. אבל:

$$f(a_n) - f(b_n) = -n - (-2n) = n \to \infty$$

7. בהקשר של אוילר ופונקציות:

$$\lim f(x)^{g(x)}$$

$f(x) = 1 + h(x)$ עבור $h(x) \to 0$. נציב $y = \frac{1}{h(x)}$ ואז

$$\lim \left((1 + \frac{1}{y})^y \right)^{g(x)h(x)} \to e^{g(x)h(x)} = e^{g(x)(f(x)-1)}$$