פתרון מועד א' אינפי 1 מדמ"ח תשפ"א

לא להילחץ אם פתרתם אחרת (בכללי לא להילחץ), יכולה להיות יותר מדרך אחת לפתרון.

1. הוכיחו שלכל $1 < x < e^2$ מתקיים:

$$\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}-1} < \frac{4\ln x}{\sqrt{x}}$$

פתרון:

לפי הרמז, נשתמש במשפט קושי ("אצלנו כל משפט זה קושי" – ח. לפלסיאן).

נתבונן בפונקציות: $f(t) = \ln^2 t, g(t) = \sqrt{t}$ בקטע $[1,x]$. הפונקציות רציפות בקטע וגזירות בקטע $(1,x)$, ובנוסף: $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \neq 0$.

אם כן, לפי קושי קיימת $c \in (1,x)$ כך ש:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)}$$

במקרה שלנו, $f'(t) = \frac{2\ln t}{t}$ ולכן השוויון האחרון אומר ש:

$$\frac{\frac{2\ln c}{c}}{\frac{1}{2\sqrt{c}}} = \frac{\ln^2 x - \ln^2 1}{\sqrt{x}-\sqrt{1}} \Longrightarrow \frac{4\ln c}{\sqrt{c}} = \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}-1}$$

כלומר, מספיק להוכיח ש: $\frac{4\ln x}{\sqrt{x}} < \frac{4\ln c}{\sqrt{c}}$. מכיוון ש-$1 < c < x$, מספיק להסביר למה הפונקציה $h\left(t\right) = \frac{4\ln t}{\sqrt{t}}$ עולה בקטע, כלומר נשאר להראות שהנגזרת שלה חיובית:

$$h'\left(t\right) = \frac{\frac{4}{t}\cdot\sqrt{t} - 4\ln t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}}{t} = \frac{4-2\ln t}{t\sqrt{t}}$$

אכן, כאשר $t < x < e^2$, $\ln t < \ln e^2 = 2$ ולכן: $4-2\ln t > 4-2\cdot 2 = 0$ והנגזרת אכן חיובית, כנדרש.

2. תהיינה $f, g$ פונקציות המוגדרות בכל הממשיים, ומקיימות: $\lim_{x\to a} f\left(x\right) = b, \lim_{x\to b} g\left(x\right) = c$. הוכיחו או הפריכו:

א. $\lim_{x\to a} g\left(f\left(x\right)\right) = c$.

<u>פתרון:</u>

בסוף לא, למשל:

$$f\left(x\right) = 5, g\left(x\right) = \begin{cases} 2 & x \neq 5 \\ 3 & x = 5 \end{cases}$$

מתקיים: $\lim_{x\to 5} f\left(x\right) = 5, \lim_{x\to 5} g\left(x\right) = 2$, כלומר: $a = b = 5, c = 2$, אך:

$$\lim_{x\to 5} g\left(f\left(x\right)\right) = \lim_{x\to 5} g\left(5\right) = \lim_{x\to 5} 3 = 3 \neq 2$$

ב. נתבונן בפונקציה:

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq b \\ c & x=b \end{cases}$$

אזי: $\lim_{x\to a} h(f(x))=c$.

<u>פתרון:</u>

כאן זה עובד. ניקח סדרה $x_n\neq a$, ונראה ש: $h(f(x_n))\to c$.

אנחנו יודעים ש: $\lim_{x\to b} g(x)=c$, ולפי הגדרת $h$ פירוש הדבר ש: $\lim_{x\to b} h(x)=c=h(b)$, כלומר $h$ רציפה בנקודה $b$.

מכיוון ש-$\lim_{x\to a} f(x)=b$, מתקיים: $f(x_n)\to b$ ומרציפות $h$ בנקודה $b$ נקבל: $h(f(x_n))\to h(b)=c$, כנדרש.

3. א. הוכיחו או הפריכו - תהי $b_n$ סדרה מונוטונית עולה של מספרים חיוביים המקיימת: $2^n\leq b_n$ החל מ-$n$ מסוים. תהי $a_n$ מונוטונית יורדת. אזי, הטור $\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum b_n a_{b_n}$ מתכנס.

ב. קבעו האם הטור $\sum \frac{1}{n\ln n}$ מתכנס.

<u>פתרון:</u>

נתחיל דווקא מסעיף ב' - הסדרה $\frac{1}{n\ln n}$ מונוטונית יורדת (כי $n,\ln n$ מונוטוניות עולות) ולכן אפשר להשתמש במבחן העיבוי - הטור מתכנס אם ורק אם הטור הבא מתכנס:

$$\sum 2^n\frac{1}{2^n\ln 2^n}=\sum\frac{1}{n\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\sum\frac{1}{n}$$

זהו טור מתבדר, וכך גם שלנו.

כעת, הטענה בסעיף א' לא נכונה. הסעיף השני יכול לכוון אותנו לדוגמה נגדית - כמו שעם $2^n$, $n$ יצא החוצה מהלוגריתם וקיבלנו טור מתבדר, אם נשים משהו אחר במעריך שייתן לנו טור מתכנס - למשל $n^2$ - נקבל הפרכה.

כלומר, נתבונן בסדרה $b_n = 2^{n^2}$. זו סדרה מונוטונית עולה של מספרים חיוביים המקיימת: $2^n \leq b_n$ החל מ-$n = 1$, הטור $\sum a_n = \sum \frac{1}{n \ln n}$ מתבדר, כפי שראינו, אך הטור:

$$\sum b_n a_{b_n} = \sum 2^{n^2} \frac{1}{2^{n^2} \ln 2^{n^2}} = \sum \frac{1}{n^2 \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum \frac{1}{n^2}$$

דווקא מתכנס.

4. תהי $a_n$ סדרה חיובית, הוכיחו או הפריכו:

א. אם $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$ לכל $n$, אז $a_n$ מתכנסת.

<u>פתרון:</u>

מצד אחד $0 < a_n$ למה אמרו חיובית, מצד שני $a_{n+1} \leq a_n - a_n^2 \leq a_n$ ולכן הסדרה מונוטונית יורדת. מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה - מתכנסת. משל"ט.

ב. אם $a_{n+1}^2 - a_n^2 \to 0$ וגם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ אז $a_n$ מתכנסת.

<u>פתרון:</u>

הטענה לא נכונה, למשל: $a_n = \sqrt[4]{n}$. מתקיים: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[4]{n}} =$

$\sqrt[4]{\frac{n+1}{n}} \to \sqrt[4]{1} = 1$, וגם:

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$$

אך: $a_n \to \infty$ ולא מתכנסת.

5. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{n\cos\frac{1}{n}} = e$, אפשר לעבור ל-$x = \frac{1}{n}$ ואז $x \to 0$, להשתמש בחוקי הלוגריתם ולעשות לופיטל על המעריך.

6. הנגזרת של $x^{e^{e^x}}$ היא $x^{e^{e^x}-1}e^{e^x}\left(e^x x \ln x + 1\right)$, אחרי שמסדרים.

7. $\frac{66}{85} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{(n+4)(n+5)} - \frac{2^{-2n}\cdot 3^n}{5^n}\right)$, חתכה אחת טלסקופי והשניה הנדסי.

8. כאשר $n$ זוגי האיברים הם מהצורה: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ וזו סדרה מונוטונית עולה שמתחילה ב-$\frac{1}{4}$ ושואפת ל-$\frac{1}{e}$.

כאשר $n$ אי-זוגי האיברים הם מהצורה: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ וזו סדרה מונוטונית עולה שמתחילה ב-2 ושואפת ל-$e$. לכן החסם העליון הוא $e$.