סמסטר א'

אלגברא לינארית 2

מועד ב'

ו בניסן

22.03.18

מרצה: פרופ' בוריס קוניאבסקי

מתרגלים: אחיה בר-און, תמר נחשוני.

מספר הקורס: 88-113-05

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון רגיל

<u>**הנחיות:**</u>

ענו על שלוש שאלות. אם עניתם על יותר שאלות מהנדרש – נא ציינו אילו שאלות הן לבדיקה; בהעדר אמירה מפורשת תיבדקנה השאלות הראשונות **.נא לענות על כל שאלה בעמוד נפרד**. .נא להסביר ולנמק בבירור את כל התשובות. ערך כל שאלה הוא 32 נק'. תקבלו 4 נק' עבור נקיון.

בהצלחה!.

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
נקייון	

שאלה 1

נתונה $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 \\ 3a & 0 & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}$.

א. לאילו ערכים של a המטריצה A לכסינה מעל R? מעל C? (15 נק')

ב. עבור כל ערך של a מסעיף א', הציגו את הצורה האלכסונית D_a (5 נק')

ג. לשאר הערכים, הציגו את צורת ז'ורדן J של A ומצאו מטריצה P_a כך ש- $J = P_a^{-1}AP_a$ (12 נק')

<u>שאלה 2</u>

א. הראו כי המעלה של הפולינום המינימלי של כל מטריצה ריבועית מסדר לפחות 2 ומדרגה 1 שווה ל-2. (10 נק')

רמז. הראו כי הדרגה של מטריצת אלכסונית-בלוקים שווה לסכום הדרגות של הבלוקים.

ב. בעזרת צורות ז'ורדן חשבו $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}$

הערה. אין קשר בין הסעיפים.

שאלה 3

יהי $V = M(n, C)$ מרחב המטריצות המרוכבות הריבועיות מסדר n .

א. הראו כי $\langle X, Y \rangle = tr(XY^*)$ מכפלה פנימית. (12 נק')

ב. לכל אחד מתתי-המרחבים הבאים הציגו בסיס אורתוגונלי ומצאו את המשלים האורתוגונלי:

- מרחב המטריצות X עם $tr(X) = 0$
- מרחב המטריצות הצמודות לעצמן (הרמיטיות)
- מרחב הממטריצות האנטי-הרמיטיות (כך ש- $X^* = -X$)
- מרחב המטריצות המשולשות העליונות. (20 נק')

שאלה 4

שאלות "הוכח או הפרך". הניקוד על כל שאלה הוא 8 נקודות. נמקו היטב את תשובותיכם!

א. אם λ^2 ערך עצמי של A^2, אזי לפחות אחד מ-$\boldsymbol{\lambda}$ ו-$\boldsymbol{-\lambda}$ הוא ערך עצמי של A

ב. יש מטריצה ריבועית מרוכבת לא לכסינה A כך ש- $A^m = I$ (m מספר שלם, I מטריצת היחידה).

ג. יהי V מרחב מכפלה פנימי . יהי T אופרטור לינארי ב-V. יהי T^* האופרטור הצמוד ל- T .
אזי $ker(T^*)$ הוא המשלים האורתוגונלי ל-$im(T)$.

ד. יהי $V = M(n, C)$ מרחב המטריצות המרוכבות הריבועיות מסדר n עם מכפלה פנימית $\langle X, Y \rangle = tr(XY^*)$, תהי $A \in M(n, C)$ ונגדיר את האופרטור הלינארי $T: V \to V$ ע"י הנוסחא $T(X) = AX$. אזי האופרטור הצמוד מוגדר ע"י הנוסחא $T^*(X) = A^*X$

.