תרגול 2

חלק ראשון- הגדרות ותרגילים בלבד

איזומטריות

1. הגדרה: יהו (X,d) ו(Y,ρ) שני מרחבים מטריים. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת איזומטריה אם f על וכן מתקיים: לכל $x_1,x_2\in X$

$$\rho(f(x_1),f(x_2))=d(x_1,x_2)$$

2. הערה: כל איזומטריה היא פונקציה חח"ע.
הסבר: נניח $f(x_1)=f(x_2)$. אז $\rho(f(x_1),f(x_2))=0$. ולכן $d(x_1,x_2)=0$. מכאן נקבל ש$x_1=x_2$.

3. פונקציה שמקיימת רק את התנאי השני (כלומר, שומרת מרחק) אבל לא בהכרח על, נקראת "שיכון איזומטרי".

4. תרגיל: יהי $f:(X,d)\to(X,d)$ שיכון איוזמטרי. האם f בהכרח על?

התכנסות

1. הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי, $x\in X$ ו$(x_n)\subseteq X$ סדרה. נאמר שהסדרה (x_n) מתכנסת לx, ונסמן $x_n\to x$ אם מתקיים: לכל $0<\epsilon\in\mathbb{R}$, קיים n_0, כך שלכל $n\geq n_0$, $x_n\in B(x,\epsilon)$. שקול: $d(x_n,x)<\epsilon$. במילים: החל ממקום מסויים, כל איברי הסדרה נמצאים בכדור. במילים אחרות: החל ממקום מסוים בסדרה, המרחק של כל איברי הסדרה מx קטן מϵ.

2. בהרצאה הוכחתם את השקילות הבאה: $x_n\to x$ אמ"ם $d(x_n,x)\to 0$, כאשר השאיפה השניה היא שאיפה בממשיים, שאותה אנחנו כבר מכירים מאינפי.

3. תרגיל: הוכיחו כי במטריקה ה3 אדית הסדרה $(2\cdot 3^n+5)$ מתכנסת ל5 $(2\cdot 3^n+5\to 5)$

4. תזכורת: l_∞ הוא מרחב הסדרות החסומות מעל הממשיים. כלומר:

$$l_\infty=\{(x_i):\sup|x_i|<\infty\}$$

זהו מרחב נורמי (ולכן מטרי) עם הנורמה:

$$||(x_i)|| = \sup |x_i|$$

תרגיל: תהא (x^n) של איברים בl_∞ (כלומר, כל איבר בסדרה הוא בעצמו סדרה אינסופית של מספרים ממשיים) ו x איבר בl_∞ (כלומר, סדרה ממשית חסומה). האם $x^n \to x$ גורר התכנסות רכיב-רכיב?
במילים: נניח ש$x^n \to x$. נשים לב שכל איבר בסדרה, וכן x בעצמו, הם סדרות אינסופיות.
נסמן בx_i את הרכיב הi של x, ובx_i^n את הרכיב הi של x^n. למשל: אם

$$x^n = (n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, ...)$$

אז $x_1^n = n, x_2^n = \frac{n}{2}$, ובאופן כללי $x_i^n = \frac{n}{i}$.
השאלה היא: אם $x^n \to x$ בl_∞, האם מתקיים שלכל i, $x_i^n \to x_i$ ב$\mathbb{R}$?
האם ההיפך נכון? כלומר, אם אנחנו יודעים שלכל i $x_i^n \to x_i$, האם מתקיים ש$x^n \to x$?

5. הגדרה: נאמר שסדרה $\{x_n\}$ היא סדרת קושי, אם לכל $\epsilon > 0$, קיים n_0, כך שלכל $n, m > n_0$ מתקיים: $d(x_n, x_m) < \epsilon$.
6. תרגיל: יהא (X, d) מ״מ. כל סדרה מתכנסת היא קושי.
7. תרגיל: יהא (X, d) מ״מ ותהא (x_n) סדרת קושי שיש לה ת״ס מתכנסת (x_{n_k}) אזי היא מתכנסת.
8. תרגיל: יהא (X, d) מ״מ הוכיחו כי כל סדרת קושי (x_n) חסומה.

שלמות

1. הגדרה: מ״מ נקרא שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת.
2. תרגיל: $(C[0,1], d_1)$ אינו שלם. (תיזכורת: $C[0,1]$ הינו מרחב הפונקציות הרציפות מהקטע $[0,1]$ לממשיים. d_1 היא המטריקה המושרית מהנורמה הבאה:

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)| dx$$

כי הם נבדלות רק בקטע $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]$ וההבדל הוא 1 לכל היותר. ולכן זוהי סדרת קושי.
בנוסף אם f_n מתכנסת היא מתכנסת לפונקצית מדרגה ששווה 0 בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ו 1 בקטע $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ שאינה שייכת למרחב.
3. תרגיל: נוכיח כי $(\mathbb{Z}, d_p)$ אינו שלם לכל $p \neq 2$. (הטענה נכונה גם עבור $p = 2$, אבל אז ההוכחה טיפה שונה): נעזר בטענות הבאות:
   (א) טענה: אם $x_n \to x$ בd_p אזי $cx_n \to cx$ בd_p.

i. הערה: זה לא נכון במקרה כללי (כלומר, קיימים מרחבים מטריים מעל $\mathbb{R}$, שבהם כפל בסקלר לא שומר על התכנסות). נסו לחשוב על דוגמא כזו.

(ב) טענה: $a_n = \sum_{i=0}^{n} p^i = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$ לא מתכנסת אבל היא סדרת קושי (ולכן המרחב לא שלם).

קבוצות פתוחות/סגורות

1. הגדרה: קבוצות פתוחות וסגורות ב מ"מ. ב (X,d) קבוצה O היא פתוחה אם $\forall x \in O \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq O$. במילים: O פתוחה אם לכל איבר x בO, קיים איזשהו רדיוס r, כך שכל הכדור סביב x ברדיוס r מוכל בO.
בהרצאה הוכחתם שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה (שימו לב שזה לא טריוויאלי!), וכן שחיתוך סופי ואיחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
נגיד שקבוצה C היא סגורה אם המשלים שלה פתוח.

2. תרגיל: יהא (X,d) מ"מ אזי כל כדור סגור $B = B[x,r]$ הוא קבוצה סגורה.
סתירה.

3. תרגיל: ב l_∞ נגדיר C קבוצת הסדרות הקבועות. אזי C סגורה.

4. תרגיל: יהא (X,d) מ"מ. כל קבוצה סגורה S היא חיתוך בן מניה של פתוחות $S = \cap_n O_n$.

מטריקות שקולות

1. הגדרה: תהי X קבוצה, ונגדיר עליה שתי מטריקות, d וd'. נאמר שd וd' שקולות אם מתקיים התנאי הבא: לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq X$ ואיבר $x \in X$, $x_n \xrightarrow{d} x$ אמ"מ $x_n \xrightarrow{d'} x$

2. דוגמא: יהי (X,d) מרחב מטרי, ויהי $0 < \alpha \in \mathbb{R}$. נגדיר על X מטריקה חדשה $\rho(x,y) =: \alpha d(x,y)$. (בידקו שזאת אכן מטריקה). שתי המטריקות הנ"ל שקולות.

3. דוגמא נוספת:

(א) נגדיר על $\mathbb{N}$ שתי מטריקות: המטריקה הדיסקרטית, והמטריקה שמושרית מהממשיים. (במטריקה הדיסקרטית המרחק בין כל שני מספרים שונים הוא 1. במטריקה שמושרית מהממשיים, כלומר, האוקלידית, המרחק בין m לn הוא $|m-n|$). האם המטריקות שקולות?

4. כעת ניתן דוגמא נגדית: נסתכל על המרחב l_1. זהו המרחב של כל הסדרות הממשיות שהטור שלהן מתכנס בהחלט. כלומר,

$$l_1 = \{(x_n) | \Sigma |x_n| < \infty\}$$

על l_1יש נורמה טבעית שמסומנת $||\cdot||_1$, שמוגדרת ע"י

$$||(x_n)|| = \Sigma |x_n|$$

בנוסף, $l_1 \subseteq l_\infty$, ולכן מוגדרת עליו גם נורמת אינסוף (נקראת גם "נורמת הסופרימום").
שתיהן מגדירות את המטריקות d_1 ו d_∞ בהתאמה.
תרגיל: הראו כי d_1 וd_∞ לא שקולות על l_1 .

$$d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

(בידקו שזו אכן מטריקה).

5. תרגיל: אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה וחח"ע. אז ערך מוחלט שקול למטריקה $d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$

6. תרגיל: יהיו d, ρ שתי מטריקות שקולות על אותה קבוצה X. נניח שאחת המטריקות שלמה. האם גם השניה שלמה?