

## תרגיל בית 2

1. תהי  $m$  מידת לבג. נניח כי לכל  $n$   $A_n$  הינה קבוצה מדידה ב  $[0,1]$ . תהי  $B$  קבוצת כל ה  $x$ -ים המופיעים באינסוף קבוצות  $A_n$ .

א. הראו כי  $B$  הינה מדידה לבג.

ב. אם  $\delta > 0$   $m(A_n) > \delta$  לכל  $n$ , הראו כי  $m(B) > \delta$ .

ג. אם  $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$  אז  $m(B) = 0$ .

ד. תנו דוגמא למקרה בו  $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$  אבל  $m(B) = 0$ .

פתרון:

א. נשים לב כי ניתן לכתוב את  $B$  בצורה הבאה:

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

במילים, אנו רוצים את כל ה  $x$ -ים אשר נמצאים בכל זנב של הסדרה  $\{A_n\}$ . ראינו בהרצאה כי הקבוצות המדידות הינן סיגמא- אלגברה ולכן סגורות לחיתוך ואיחוד בן מנייה. מכאן שאם נסמן

$$E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

הינה סדרה של קבוצות מדידות ולכן הקבוצה  $B$  הינה

מידה שכחיתוך של מדידות.

ב. נשים לב כי  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$  וגם מתקיים כי  $m(E_1) \leq 1$  שכן  $E_1 \subseteq [0,1]$ . ראינו כי מידה הינה "רציפה" ומכאן ש

$$\begin{aligned} m(B) &= m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) \geq \delta \end{aligned}$$

ג. מכיוון ש  $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$  נובע כי  $\sum_{k=n}^{\infty} m(A_n) \rightarrow 0$  כאשר  $k \rightarrow \infty$ . מהסעיף

הקודם נובע כי  $m(B) = 0$ .

ד. ניקח את  $A_n = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \right)$ . קל לראות כי  $m(A_n) = \frac{1}{(n+1)}$  וכי

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty \text{ מצד שני } E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A_k \text{ ולכן}$$

$$m(B) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = m\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = 0$$

2. יהי  $\varepsilon > 0$ , תהי  $m$  מידת לבג, ונניח כי  $A$  הינה קבוצת בורל ב  $\mathbb{R}$ . הוכח כי אם מתקיים

$$m(A \cap I) \leq (1 - \varepsilon)m(I)$$

לכל אינטרוול  $I$  אזי  $m(A) = 0$ .

פתרון: נניח תחילה כי  $m(A) < \infty$ . אזי עפ"י ההגדרה של המידה החיצונית  $m^*$  (שמסכימה עם  $m$  לכל קבוצה מדידה בורל) קיימת קבוצה פתוחה  $O$  כך ש  $A \subset O$  ו  $m(O) - \delta < m(A)$  לכל

$\delta > 0$ . ניתן לרשום  $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  כאשר  $I_n$  קטעים זרים ופתוחים. נקבל כי

$$\begin{aligned} m(O) - \delta < m(A) &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap I_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon)m(I_n) = (1 - \varepsilon)m(O) \end{aligned}$$

$\varepsilon$  קבוע אך  $\delta$  קטן כרצוננו, ולכן כאשר  $\delta \rightarrow 0$  נקבל כי  $m(O) \leq (1 - \varepsilon)m(O)$  ומכאן כי  $m(A) = 0$  וגם  $m(O) = 0$ .

מכאן נובע כי

עבור המקרה בו  $m(A) = \infty$  נתסתכל על  $A_i = A \cap [i-1, i]$  עבור  $i \in \mathbb{Z}$ . ברור כי מתקיים

$$m(A_i \cap I) \leq m(A \cap I) \leq (1 - \varepsilon)m(I)$$

לכל אינטרוול  $I$ . עפ"י המקרה הקודם נובע כי  $m(A_i) = 0$ . מכאן ש

$$m(A) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap [i-1, i]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 0$$

מש"ל

3. הגדרה: נאמר שקבוצה  $G \subseteq \mathbb{R}$  היא מטיפוס  $G_\delta$  אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

תהי  $E \subseteq \mathbb{R}$  הוכיחו שקיימת קבוצה  $G \in G_\delta$  המקיימת  $E \subseteq G$  וכן  $m^*(G) = m^*(E)$ .

הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:

א. הוכיחו שלכל קבוצה  $E \subseteq \mathbb{R}$  ולכל  $\varepsilon > 0$  קיימת קבוצה פתוחה  $O$ , המקיימת  $E \subseteq O$  וכן

$$m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$$

ב. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

א. פתרון: תהי  $E \subseteq \mathbb{R}$ . עפ"י ההדרכה, נמצא קבוצה פתוחה  $O$  כך ש  $m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$ .

מכיוון שהמידה החיצונית של קבוצה הינה האינפימום על סכום של אורך של קטעים שאיחודם

מכסה את  $E$  נקבל כי קיימים קטעים  $\{I_k\}$  המכסים את  $E$  כך ש  $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < m^*(E) + \varepsilon$

. מכאן שאם נסמן  $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ , נקבל כי  $O$  הינה קבוצה פתוחה המקיימת

$$m^*(O) \leq \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < m^*(E) + \varepsilon$$

. נבנה סדרה של קבוצות פתוחות  $\{O'_m\}$  כך ש

$$m^*(O'_m) < m^*(E) + \frac{1}{m} \quad \text{נסמן } O = \bigcap_{m=1}^{\infty} O'_m \text{ . זוהי קבוצה ב } G_\delta \text{ . מהמונטוניות של המידה}$$

נקבל

$$m^*(E) \leq m^*(O) = m^*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} O'_m\right) < m^*(E) + \frac{1}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{ב.}$$

את הפתרון.

4. תהי  $\mathcal{E}$  משפחה כלשהי של קבוצות ב  $X$ . הראו כי לכל  $A \in \sigma(\mathcal{E})$  קיימת משפחה בת מנייה  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$

$$\text{כך ש } A \in \sigma(\mathcal{D})$$

הדרכה:

א. הראו כי קבוצת הקבוצות ב  $\sigma(\mathcal{E})$  המקיימות את תכונה זו הינה סיגמא אלגברה.

ב. הראו כי הקבוצות ב  $\mathcal{E}$  מקיימות את תכונה זו והסיקו את הנדרש

פתרון:

א. נסמן ב  $\mathcal{S}$  קבוצת כל הקבוצות ב  $\sigma(\mathcal{E})$  המקיימות את התכונה ונראה כי  $\mathcal{S}$  הינה סיגמא אלגברה:

i. ניקח  $E \in \mathcal{E}$ , ברור כי  $E \in \sigma(E)$  ומכאן ש  $X \in \mathcal{S}$ .

ii. אם  $A \in S$  אזי נובע כי קיימת סדרה  $\{E_n\}$  כך ש  $E_n \in \mathcal{E}$  וגם  $A \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$ .  
מכאן ש  $A^c \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$  ולכן  $A^c \in S$ .

iii. תהי  $A_n \in S$ . נובע כי לכל  $n$  קיימת סדרה  $\{E_n^k\}$  של קבוצות כך ש  $E_n^k \in \mathcal{E}$  וגם  $A_n \in \sigma(E_n^k, k \in \mathbb{N})$ . קל לראות כי אז  $\{E_n^k\}_{n,k \in \mathbb{N}}$  הינה בת מנייה וכן  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in S$  ולכן  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma(E_n^k, n, k \in \mathbb{N})$ .  
מכאן ש  $S$  הינה סיגמא אלגברה.

ב. ברור כי לכל  $E \in \mathcal{E}$  מתקיים כי  $E \in \sigma(E)$  ולכן  $E \in S$ . מכאן נובע כי  $\sigma(E) \subseteq S$  וסיימנו.