

## תרגיל 8

1. תהי  $A$  תת קבוצה של  $[0,1]^2$  מדידה לבג (ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה) עם מידה  $m_2(A)=1$  כאשר  $m_2 = m \times m$  ו  $m$  הינה מידת לבג. הראו כי כמעט לכל  $x \in [0,1]$  הקבוצה  $s_x(A) = \{y : (x, y) \in A\}$  הינה בעלת מידה  $m(s_x(A))=1$ .

2. יהי  $X = Y = \mathbb{R}$  ונסתכל על  $\mathbb{R}^2$  ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \text{ and } x \leq y < x+1 \\ -1 & x \geq 0 \text{ and } x+1 \leq y < x+2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הראו כי  $\int \int f(x, y) m(dx) m(dy) \neq \int \int f(x, y) m(dy) m(dx)$  . מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?

3. הוכיחו כי  $I = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  . רמז : חשבו קודם את  $I^2$  וחשבו את האינטגרל הכפול ע"י מעבר לקורדינטות פולאריות .