מופשטת 3 תשע"ה ־ פתרון תרגיל 1

1. Fשדה ויהי $f(x) \in F[x]$ הוכיחו: $f(c) = 0$ אם"ם $(x-c)|f(x)$.
$\Longleftarrow$ באינדוקציה על דרגת הפולינום $degf = n$. עבור $n = 1$ זה ברור. עבור n כללי, נסמן את הפולינום $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. נתבונן בפולינום $g(x) = f(x) - (x-c)^n$ ־ זהו פולינום מדרגה $n >$ המקיים $g(c) = 0$ ולכן מהנחת האינדוקציה $(x-c)|g(x)$. ולכן $(x-c)|(g(x) + (x-c)^n) = f(x)$.
$\Longrightarrow$ אם $(x-c)|f(x)$ אז יש $h(x)$ כך ש $f(x) = h(x)(x-c)\ldots$ נציב שם ונקבל $f(c) = 0$.

2. פרקו לגורמים אי פריקים את הפולינום $x^4 - 2$ מעל השדות:
   (א) $\mathbb{C}$: $(x+\sqrt[4]{2})(x-\sqrt[4]{2})(x-i\sqrt[4]{2})(x-i\sqrt[4]{2})$
   (ב) $\mathbb{R}$: $(x^2-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2})$
   (ג) $\mathbb{Q}$: אי פריק (איזנשטין)
   (ד) $\mathbb{Z}_3$: $x^4 - 2 = x^4 + 1 = (x^2+2)(x^2-2)$ שני הגורמים האלו אי־פריקים (למשל כי אין להם שורש). [ניתן להשיג את הפירוק למשל ע"י מעבר על כל האי־פריקים מדרגה עד 2].

3. הוכח: $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{3}+\sqrt{2}]$.
$\subseteq$ כיוון ברור
$\supseteq$ראשית נשים לב ש $\sqrt{2}\sqrt{3} = \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}+\sqrt{2}]$.
נקבל $\sqrt{2} = (\sqrt{2}\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}+\sqrt{2}]$.

4. פתרו את המשוואה: $2x^3 - 30x^2 + 162x - 350 = 0$

5. מצא פולינום מעל $\mathbb{Z}$ עם שורש $\sqrt[3]{5} + \sqrt{2}$ (רמז: חשב עד חזקה שישית).
נסמן $x = \sqrt[3]{5} + \sqrt{2}$, ונעלה בחזקות עד שנראה שיש יחס
$x^6 - 6x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 60x + 17 = 0$ (החישוב ארוך־ סליחה על זה!)

6. רשמו את התת־שדה של $\mathbb{C}$ המינימלי שמכיל את $\mathbb{Q}$ ואת $\sqrt{3}$ ואת ρ_3. כאשר ρ_3 הוא שורש 3 פרימיטיבי של 1. (כלומר $\rho_3^3 = 1$). כתבו אותו גם כחוג מנה של חוג הפולינומים $\mathbb{Q}[x]$.
הפתרון הוא $\mathbb{Q}[i, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\rho_3]$ (הוכחת השיוויון דומה לדברים שראינו בתירגול ואפילו בתרגיל זה ממש). נסמן את התת־שדה המינימלי K ונראה שזה בעצם $\mathbb{Q}[\rho_3]$:
מצד אחד K הוא המינימלי שמכיל את כל הדרוש ולכן $K \subseteq \mathbb{Q}[\rho_3]$ ומצד שני $\mathbb{Q}, \rho_3 \in K$ לפי הדרישה, ובגלל ש K תת־שדה (ולכן סגור לפעולות) אז בהכרח $\mathbb{Q}[\rho_3] \subseteq K$.