אקסיומות ZF

1. אקסיומת הקבוצה הריקה - קיימת קבוצה ריקה.
2. אקסיומת ההקפיות- שתי קבוצות שוות אם יש בהן את אותם איברים.
3. אקסיומת הזיווג- אם A, B קבוצות אז $\{A, B\}$ קבוצה.
בפרט לכל A, $\{A\}$.
מסקנה: זוג סדור מוגדר להיות

$$(a, b) = (c, d)$$

אמ"ם

$$a = c \wedge b = d$$

למעשה ניתן להגדיר את הזוג הסדור (a, b) להיות:

$$(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$$

הוכיחו ש

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

טענה: לכל שתי קבוצות A, B הזוג הסדור (A, B) הוא גם קבוצה.
הוכחה: אם A, B קבוצות מאקסיומת הזיווג $\{A, B\}$ היא גם קבוצה.
ולכן הקבוצה $\{A, \{A, B\}\}$ היא קבוצה.
4. אקסיומת האיחוד:

$$\forall A \exists F : [x \in F \iff \exists y \in A \wedge x \in y]$$

מסמנים את הקבוצה F ב$\bigcup A$.
הערה: אם $A = \{B, C\}$ אז מקובל לסמן

$$\bigcup A = B \cup C$$

הערה: מהאקסיומות שמנינו עד כה, ניתן לבנות את כל הסודרים הטבעיים.
הוכחה:

$$0 = \emptyset$$

קיימת מאקסיומת הקבוצה הריקה.
נניח שבנינו את n.
מאקסיומת הזיווג, יש גם את $\{n\}$.

שוב מאקסיומת הזיווג נקבל את $\{n,\{n\}\}$
מאקסיומת האיחוד נקבל את $n\cup\{n\}$, וזה ההגדרה של $n+1$.
5. אקסיומת קבוצת החזקה:

$$\forall A\exists F:[x\in F\iff x\subseteq A]$$

לקבוצה F הנ"ל אנחנו קוראים "קבוצת החזקה" של A ומסמנים אותה ב$P(A)$.
6. סכימת ההפרדה: לכל נוסחא φ בשפה של תורת הקבוצות שיש לה לפחות משתנה חופשי אחד, מקצים אקסיומה:
תהי $\varphi(v_0,...,v_n)$.

$$\forall A\forall x_1,...,x_n\exists F:[x\in F\iff x\in A\wedge\varphi(x,x_1,...,x_n)]$$

מסקנה: יהיו A,B קבוצות, אז $A\times B$ היא קבוצה.

$$A\times B=\{x\in P(P(A\cup B)):x=(a,b)\wedge a\in A\wedge b\in B\}$$

שלבים: A,B קבוצות.
מאקסיומת הזיווג $\{A,B\}$ קבוצה.
מאקסיומת האיחוד $\bigcup\{A,B\}=A\cup B$ היא קבוצה.
מאקסיומת קבוצת החזקה $P(A\cup B)$ היא קבוצה.
מאקסיומת החזקה שנית, $P(P(A\cup B))$
מסכימת ההפרדה, אוסף האיברים ב$P(P(A\cup B))$ שמקיימים את הנוסחא שכתבנו היא קבוצה.
7. אקסיומת האינסוף: קיימת קבוצה A שמקיימת:

$$\emptyset\in A$$

$$\forall a\in A,a\cup\{a\}\in A$$

לקבוצה שמקיימת את הדרישות הנ"ל קוראים "קבוצה אינדוקטיבית".
טענה: תהי A קבוצה אינדוקטיבית. יש לA תת קבוצה אינדוקטיבית מינימלית.
הוכחה: נסמן $F=\{B\subseteq A:\text{inductive is B}\}$.

$$F\neq\emptyset$$

כי $A\in F$.

$$\bigcap F$$

הערה: תהי F קבוצה לא ריקה של קבוצות. אז ניתן להגדיר את $\bigcap F$. נבחר $A\in F$. נגדיר נוסחא:

$$\forall B\in Fx\in B$$

$$\bigcap F = \{x \in A : \forall B \in F x \in B\}$$

$\bigcap F \subseteq A$. כמו כן, ניתן להוכיח שחיתוך של קבוצות אינדוקטיביות הוא קבוצה אינדוקטיבית.

קיבלנו תת קבוצה אינדוקטיבית של A, שמוכלת בכל תת קבוצה אינדוקטיבית של A, כי היא החיתוך של כולם. נסמן אותה ב$\omega(A)$.

טענה: יהיו A, B קבוצות אינדוקטיביות. אזי $\omega(A) = \omega(B)$.

הוכחה: נסתכל על $\omega(A) \cap \omega(B)$. זה חיתוך של קבוצות אינדוקטיביות ולכן זאת קבוצה אינדוקטיבית.

היא מוכלת ב$\omega(A)$ וב$\omega(B)$ אבל הן קבוצות אינדוקטיביות מינימליות, לכן היא שווה ל$\omega(A)$ ול$\omega(B)$. כלומר, $\omega(A) = \omega(B)$.

סימון: לתת קבוצה האינדוקטיבית המינימלית של קבוצה אינדוקטיבית נקרא ω. היא מוגדרת היטב.

אקסיומת היסוד:

$$\forall A \neq \emptyset \exists F : [F \in A \land \forall x \in A \neg(x \in F)]$$

במילים: בכל קבוצה A קיים איבר שייך- מינימלי.

מסקנה: לכל קבוצה A, $A \notin A$.

הוכחה: תהי A קבוצה. אז $\{A\}$ קבוצה. יש בקבוצה $\{A\}$ איבר שייך מינימלי. לכן האיבר הזה הוא A. זה אומר שכל איבר ב$\{A\}$ לא שייך לA. בפרט, $\neg(A \in A)$.

סכימת ההחלפה: לכל נוסחא בשפה של תורת הקבוצות בעלת לפחות שני משתנים חופשיים, $\varphi(v_0, ..., v_n)$ מקצים אקסיומה:

$$\forall A \forall x_2, ..., x_n [\forall x \in A \exists! y : \varphi(x, y, x_2, ..., x_n)] \to$$

$$[\exists B : (y \in B \iff \exists x : x \in A \land \varphi(x, y, x_2, ..., x_n)]$$

במילים: אם φ היא נוסחא שיוצרת פונקציה על A, כלומר לכל איבר בA מתאים איזשהו איבר יחיד, אז התמונה של הפונקציה היא קבוצה.

בניית הסודר של הארטוגס

תזכורת: בשיעור הקודם אמרנו שלכל קבוצה A קיים סודר מינימלי $\theta(A)$ כך שאין פונקציה חח"ע ממנו לA.

$$\theta(A) = \{\alpha : \ \{A \text{ to } \alpha \text{ from one to one f exists}$$

נוכיח שלכל קבוצה A, $\theta(A)$ הוא קבוצה.

הוכחה:

1. $A' = \{(B, W)\}$ כך שB היא תת קבוצה של A, וW הוא יחס סדר טוב על B. נוכיח שA' היא קבוצה.

2. $A'' = \{otp(B,W) : (B,W) \in A'\}$ נוכיח שA'' היא קבוצה.
טענת עזר:

$$A'' = \theta(A)$$

הוכחת העזר: נראה הכלה דו כיוונית.
$\theta(A) \subseteq A''$. יהי $\alpha \in A''$. אז α הוא טיפוס הסדר של (B,W). בפרט α הוא סודר, ויש פונקציה חח"ע ועל ממנו לB. כלומר יש פונקציה חח"ע ממנו לA. אז $\alpha \in \theta(A)$.
$A'' \subseteq \theta(A)$: יהי $\alpha \in \theta(A)$. כלומר יש $f : \alpha \to A$ חח"ע. נקח $B = f[\alpha]$. ונגדיר על B את יחס הסדר שמושרה מf, W. אז $(B,W) \in A'$ ו$otp(B,W) = \alpha$. כלומר $\alpha \in A''$.
בחזרה להוכחה של 1:
שלב א': קיימת נוסחא $\varphi_0(v_0)$ כך ש$\varphi_0(x)$ מבטא שx היא הקבוצה הריקה.

$$\varphi_0(v_0) := \forall y : \neg(y \in v_0)$$

שלב ב': קיימת נוסחא $\varphi_1(v_0, v_1)$ כך ש$\varphi_1(x,y)$ מבטא את העובדה ש$x \subseteq y$.

$$\varphi_1(v_0, v_1) := \forall y[y \in v_0 \to y \in v_1]$$

שלב ג': (בתרגול/בש"ב): קיימת נוסחא $\varphi_2(v_0, v_1, v_2)$ כך ש$\varphi_2(x,y,z)$ מבטאת את העובדה ש$z = (x,y)$
שלב ד': קיימת נוסחא $\varphi_3(v_0, v_1)$ שמבטאת את העובדה שv_1 הוא יחס סדר טוב על v_0
ראשית נבטא את העובדה שv_1 הוא קבוצה של זוגות סדורים מv_0

$$\forall p : [p \in v_1 \iff \exists a \in v_0 \exists b \in v_0 : \varphi_2(a,b,p)]$$

כעת נבטא את העובדה שv_1 הוא יחס סדר. כלומר, אנטירפלקסיבי וטרנזיטיבי.

$$\forall p : [\exists a \in A : \varphi_2(a,a,p) \to \neg(p \in v_1)]$$

$$\forall p_1, \forall p_2, \forall p_3 : [\exists x, \exists y, \exists z : x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge$$

$$\varphi_2(x,y,p_1) \wedge \varphi_2(y,z,p_2) \wedge \varphi_3(x,z,p_3) \wedge p_1 \in v_1 \wedge p_2 \in v_1] \to p_3 \in v_1$$

כעת נבטא את העובדה שv_1 הוא יחס סדר טוב על v_0.

$$\forall A : [\varphi_0(A) \vee \neg\varphi_1(A, v_0) \vee (\exists x : x \in A \wedge (\forall y \in A : y = x \vee \exists p : p \in v_1 \wedge \varphi_2(x,y,p))]$$

שלב ה': קיימת נוסחא $\varphi_4(v_0)$ כך ש$\varphi_4(x)$ מתקיים אמ"ם x הוא סודר.

שייך טרנזיטיבי:

$$\forall y, \forall z : [y \in v_0 \wedge z \in y \to z \in v_0]$$

שייך יוצר יחס סדר טוב:

$$\exists W : \varphi_3(v_0, W) \wedge [p \in W \iff \exists x \exists y : x \in y \wedge \varphi_2(x, y, p)]$$

שלב ו': קיימת נוסחא $\varphi_5(v_0, v_1)$ כך ש$\varphi_5(x, y)$ מתקיים אמ"ם $x = (B, W)$, y סודר, וקיים איזו סדר מy ל(B, W).
תוכיחו בתרגול/בש"ב.
שלב ז': נוכיח שA' היא קבוצה:

$$A' = \{p \in P(A) \times P(A \times A) : \exists B \exists W : \varphi_2(B, W, p) \wedge \varphi_3(B, W)\}$$

מסכימת ההפרדה A' הוא קבוצה.
A'' מתקבלת מהפעלת סכימת ההחלפה על A' עם הנוסחא φ_5. נשים לב שלכל x בA' קיים y יחיד שמתאים לו, כלומר שמתקיים $\varphi_5(x, y)$. כי לכל קבוצה סודר היטב יש סודר יחיד שמתאים לה.
ולכן האוסף של כל הy שמקיימים את הנוסחא עם איזשהו x מA', מהווה קבוצה.

אקסיומת הבחירה ושיקולים

אקסיומת הבחירה: תהי S קבוצה של קבוצות כך ש$\emptyset \neq S \bigcup$, אזי קיימת פונקציה

$$f : S \to \bigcup S$$

כך שלכל $\emptyset \neq x \in S$

$$f(x) \in x$$

יש עוד אקסיומות ששקולות לאקסיומת הבחירה במערכת ZF.
כלומר שאם נקח את ZF ואקסיומת הבחירה נוכל להוכיח את האקסיומה השניה.
ואם נקח את ZF והאקסיומה השניה, נוכל להוכיח את אקסיומת הבחירה.
עקרון הסדר הטוב: על כל קבוצה A ניתן להגדיר סדר טוב.
מושגי רקע:
תהי A קס"ח.
שרשרת בA: תת קבוצה $B \subseteq A$ שעם היחס המושרה מA היא סדורה קווית.
למשל, אם נקח $P(\mathbb{N})$ עם יחס ההכלה. שרשרת:

$$\{1\} \subseteq \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, \} \subseteq \ldots$$

איבר מקסימלי: איבר $a \in A$ כך שלכל $b \in A$ $\neg(a < b)$.
חסם מלעיל של קבוצה: תהי $B \subseteq A$ תת קבוצה. a נקרא חסם מלעיל של B אם לכל $b \in B$

$$b \leq a$$

שרשרת מקסימלית: תת קבוצה של A שמהווה שרשרת, ולא מוכלת ממש בשום שרשרת.
עיקרון המקסימום של האוסדורף: תהי A קס"ח. אזי קיימת בA שרשרת מקסימלית.
הלמה של צורן: תהי A קס"ח לא ריקה, שמקיימת את התנאי: לכל שרשרת בA יש חסם מלעיל. אזי קיים בA איבר מקסימלי.
משפט: האקסיומות הבאות שקולות מעל ZF:

1. הלמה של צורן
2. עקרון המקסימום של האוסדורף
3. עקרון הסדר הטוב
4. אקסיומת הבחירה

הוכחה:
$2 \rightarrow 1$: תהי A קבוצה סדורה חלקית. נוכיח שיש בA שרשרת מקסימלית.
נסתכל על הקבוצה הבאה:

$$F = \{B \subseteq A : \text{chain a is B}\}$$

זאת קבוצה סדורה חלקית עם יחס ההכלה.

$$(F, \subseteq)$$

האם לכל שרשרת בF יש חסם מלעיל?
שרשרת בF, G, היא אוסף של שרשראות מA, שכל שניים מקיימים שאחד מהם מוכל בשני.
חסם= איבר בF, כלומר שרשרת מA שמכיל את כל איברי השרשרת.
נקח את

$$\bigcup G = \bigcup_{B_i \in G} B_i$$

זאת תת קבוצה של A, כי היא איחוד של תתי קבוצות של A.
נוכיח ש$\bigcup G$ הוא שרשרת בA. יהיו $a, b \in \bigcup G$. כלומר, יש $B_1, B_2 \in G$ כך ש$a \in B_1$ ו$b \in B_2$.
G היא בעצמה שרשרת. כלומר, כל שתי קבוצות בG מקיימות שאחת מהן מוכלת בשניה. בה"כ $B_1 \subseteq B_2$. אז $a, b \in B_2$. B_2 היא שרשרת בA. כלומר בין כל שני איברים בB_2 יש יחס בA. ולכן יש יחס בין a לb.
כלומר, קיבלנו שבין כל שני איברים ב$\bigcup G$ יש יחס, ולכן $\bigcup G$ הוא שרשרת בA.
כלומר, $\bigcup G \in F$.
בנוסף, ברור ש$\bigcup G$ מכיל כל B שנמצא בG.
ולכן $\bigcup G$ הוא חסם של G, כי הוא גדול שווה ביחס ההכלה מכל איברי G.
קיבלנו שהקס"ח $(F, \subseteq)$ מקיימת את התנאי של הלמה של צורן. לכל שרשרת בה יש חסם.

לכן קיים בF איבר מקסימלי.
כלומר, קיימת שרשרת בA שלא מוכלת ממש בשום שרשרת.
כלומר, קיימת בA שרשרת מקסימלית.
$2 \to 3$: תהי A קבוצה. נסתכל על הקבוצה הבאה:

$$F = \{(B, W)\}$$

כך שB היא תת קבוצה של A וW הוא יחס סדר טוב על B.
למשל אפשר לקחת את הזוג של הקבוצה הריקה והיחס הריק.
נגדיר על F יחס סדר חלקי:

$$(B, W) \leq (B', W')$$

אם $B \subseteq B'$ וB עם היחס W מהווה רישא ממש של B' עם היחס W'.
זה אכן יוצר יחס סדר חלקי על F.
מעקרון המקסימום של האוסדורף קיימת בF שרשרת מקסימלית.
כלומר, קיימת שרשרת G:

$$(B_1, W_1) \subseteq (B_2, W_2) \subseteq ...$$

אוסף של תתי קבוצות עם יחס סדר טוב שהגדרנו עליהם שבין כל שתיים אחת מהווה רישא של השניה, ואי אפשר להגדיל את האוסף הזה כך שהוא ישאר שרשרת.
טענה: $\bigcup W_i$ יוצר יחס סדר טוב על $\bigcup B_i$.
הוכחת הטענה:
אנטי- רפלקסיביות: לכל $a \in \bigcup B_i$, $(a, a) \notin \bigcup W_i$ כי הוא לא נמצא בשום W_i.
טרנזיטיביות: נניח ש $a, b, c \in \bigcup B_i$ כך ש$(a, b), (b, c) \in \bigcup W_i$. בה"כ $(a, b) \in W_1$ ו$(b, c) \in W_2$. מכיוון שG שרשרת, בין כל שני יחסי סדר טובים יש יחס הכלה. בה"כ $W_1 \subseteq W_2$ לכן $(a, b), (b, c) \in W_2$. לכן $(a, c) \in W_2$.
יחס סדר טוב: תהי $\emptyset \neq C \subseteq \bigcup B_i$.
קיים איזשהו j כך ש$C \cap B_j \neq \emptyset$.
B_j סדורה היטב על W_j, אז ל$C \cap B_j$ יש איבר ראשון, x.
נטען שx הוא איבר ראשון של C.
יהי $y \in C$. אם $y \in B_j$- סיימנו. כי נקבל ש$x \leq y$.
אחרת, קיים k כך ש$y \in B_k$.
ידוע שבין B_j לB_k יש יחס הכלה. אבל מכיוון ש$y \in B_k$ ולא שייך לB_j אז $B_j \subseteq B_k$. יותר מזה- B_j הוא רישא של B_k. אם $y \leq x$ אז בגלל שB_j היא רישא, ו$x \in B_j$ נקבל ש$y \in B_j$- סתירה להנחה.
לכן $x < y$.
טענה: $\bigcup B_i = A$.
אחרת, קיים $a \in A \setminus \bigcup B_i$. נגדיר $B = \bigcup B_i \cup \{a\}$ ונגדיר עליה יחס סדר Wשזה $\bigcup W_i$ על $\bigcup B_i$, ובנוסף a גדול מכל איברי $\bigcup B_i$. זה יוצר יחס סדר טוב. אז ניתן לקחת את השרשרת G ולהוסיף לה את (B, W). נקבל שרשרת חדשה, כי כל איברי G מהווים רישא של (B, W).
קיבלנו שרשרת חדשה שמכילה ממש את G.
בסתירה למקסימליות.
לכן לא ייתכן שקיים $a \in A \setminus \bigcup B_i$. כלומר, $\bigcup B_i = A$.
נובע שהגדרנו יחס סדר טוב על A.