פתרון אינפי 1 – תרגיל 9

<u>תרגיל 1:</u>

מצאו את הגבול $\lim\limits_{x\to1}\frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$

<u>פתרון:</u>

ניזכר בזהות הטריגונומטרית $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1$ לכן $\cos(2x)+1=2\cos^2 x$. מכאן, $1+\cos(\pi x)=2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{(1-x)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi^2}{4}(1-x)^2}\cdot\frac{\pi^2}{4}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\pi^2}{4}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1-x)\cdot\frac{\pi}{2}(1-x)}$$

כעת נבצע החלפת משתנים: $\left\{\begin{matrix} t=\frac{\pi}{2}(1-x) \\ x\to1\ \Rightarrow\ t\to0\end{matrix}\right\}$ ונקבל את הגבול:

$$\lim_{t\to0}\frac{\pi^2}{4}\frac{2\sin t\sin t}{t\cdot t}=\frac{\pi^2}{2}$$

תרגיל 2:

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$

פתרון:

מתקיים $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$

אם $x>0$ נכפיל את האי-שוויון ב-x ונקבל: $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$. לפי משפט הסנדוויץ' נסיק ש- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

אם $x<0$ נקבל באופן דומה $1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$ ושוב $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים, ולכן $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

ב. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$

פתרון:

לכל $x>1$ מתקיים $0<\frac{1}{x}<1$ ומכאן $\left[\frac{1}{x}\right]=0$. לכן, לכל $x>1$ מתקיים $x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=0$. לכן $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=0$.

ג. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[x]}{x}$

פתרון:

הגבול לא קיים. נראה זאת באמצעות גבולות חד צדדיים.

במקרה של $x > 0$ נבצע הצבה: $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{y} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{x} \\ x \to 0^+ \;\Rightarrow\; y \to \infty \end{array} \right\}$ ונקבל:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{[x]}{x} = \lim\limits_{y \to \infty} y\left[\frac{1}{y}\right] = 0$ (השוויון האחרון נובע מסעיף ב').

מאידך, אם $x < 0$ ושואף לאפס משמאל, בסביבה שמאלית מנוקבת של אפס: $(-1,0)$ נקבל: $[x] = -1$. כלומר: $\frac{[x]}{x} = \frac{-1}{x}$ וכאשר $x \to 0^-$ מתקיים $\frac{-1}{x} \to \infty$.

תרגיל 3:

לאילו ערכי a,b קיים הגבול בנקודה $x = 1$: $f(x) = \begin{cases} ax & x \le 1 \\ x^2 + b & x > 1 \end{cases}$

פתרון:

על מנת שיהיה גבול, צריך להתקיים: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. כלומר, $a = 1 + b$.

שאלה 4:

הוכיחו/הפריכו: אם $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ אזי $\lim\limits_{x \to \infty} [f(2x) - f(x)] = 0$

פתרון:

הוכחה:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ ולכן לכל $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ קיים $m > 0$ כך שלכל $x > m$ מתקיים $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. בוודאי מתקיים $2x > x > m$ ולכן מתקיים $|f(2x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ ולכן לכל $x > m$ מתקיים

$|f(2x) - f(x) - 0| = |f(2x) - L + L - f(x)| \le |f(2x) - L| + |L - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

ובמילים אחרות $\lim\limits_{x \to \infty} [f(2x) - f(x)] = 0$.

שאלה 5:

א. חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$

<u>פתרון:</u>

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot(x+1-x)}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+\left(x^2+x\right)^{\frac{1}{3}}}=\left\{\text{צמצום ב}\quad x^{\frac{2}{3}}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{3}$$

ב. איך תשתנה תשובתכם אם $x\to-\infty$?

<u>פתרון:</u>

לא יודעים לגבי תשובת**כם**, אבל תשובת**נו** לא תשתנה...

<u>שאלה 6:</u>

הוכיחו כי לא קיימים הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$

<u>פתרון:</u>

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$, מצד שני:

אם $0<x<\frac{\pi}{2}$ אזי $\cos x$ הוא חיובי ושואף לאפס כאשר $x\to\frac{\pi}{2}^-$

אם $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ אזי $\cos x$ הוא שלילי ושואף לאפס כאשר $x\to\frac{\pi}{2}^+$

לכן, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=\infty$. מכאן, הגבול $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ אינו קיים.

ב. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{\sin^3 x}$

<u>תזכורת</u>: זיכרו שראיתם בהרצאה את האי-שוויון:

לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $0<\sin x<x$, ולכל $-\frac{\pi}{2}<x<0$ מתקיים

$x<\sin x<0$

<u>פתרון:</u>

כאשר $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים: $\frac{x^2+x^3}{\sin^3 x}\ge\frac{x^2+x^3}{x^3}=\frac{1}{x}+1\xrightarrow{x\to 0^+}\infty$. נסמן

$g(x)=\frac{1}{x}+1$, $f(x)=\frac{x^2+x^3}{\sin^3 x}$. כעת, מתקיים $\frac{x^2+x^3}{\sin^3 x}\xrightarrow{x\to 0+}\infty$,

מדוע?

הסבר: $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\infty$, $f(x)\ge g(x)$ לכל $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (שימו לב ש-

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ זאת סביבה מנוקבת ימנית של 0). לכן, על פי משפט $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$.

כלומר, $f(x)\ge g(x)$ לא חייב להתקיים לכל x, אלא מספיק שייתקיים בסביבה

הרלוונטית של 0 (אצלנו: סביבה ימנית מנוקבת של 0).

כאשר $-\frac{\pi}{2}<x<0$ מתקיים: $\frac{x^2+x^3}{\sin^3 x}\le\frac{x^2+x^3}{x^3}=\frac{1}{x}+1\xrightarrow{x\to 0^-}-\infty$.

ולכן $\frac{x^2+x^3}{\sin^3 x}\xrightarrow{x\to 0^-}-\infty$.

לסיכום, קיבלנו שני גבולות חדד צדדיים <u>שונים</u> ולכן הגבול לא קיים.

ג. $\lim_{x\to a}[x]$ לכל $a\in\mathbb{Z}$

<u>פתרון:</u>

$$\lim_{x\to a^+}[x]=a$$

$$\lim_{x\to a^-}[x]=a-1$$

שכן, לכל $a<x<a+1$ מתקיים $[x]=a$, ולכל $a-1<x<a$ מתקיים

$[x]=a-1$. לכל $a\in\mathbb{Z}$ מתקיים $a\neq a-1$ ולכן הגבולות החד צדדיים שונים

ולכן הגבול לא קיים.

<u>אתגר מחשבתי</u>

(לא חובה, ולא יהיה בבוחן, אבל נחמד לחשוב על דברים כאלה מדי פעם ☺)

תנו דוגמא לפונקציה <u>חיובית</u> ולא חסומה, המוגדרת בקטע $\left[0,1\right]$ <u>שאינה</u> שואפת לאינסוף בשום נקודה.

<u>תשובה:</u>

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\cap\left[0,1\right]\\ \dfrac{1}{x} & otherwise\end{cases}$$