שיעור השלמה - חנוכה
הרצאה XIII,XIV-אינפי 1

ממשיכים עם גבולות של פונקציות. נעבור לפעולות אריתמטיות של גבולות:

משפט: $A \subset R$ ושתי פונקציות $f, g: A \to R$, וגם $p \in LimA$. נניח שקיימים הגבולות ומתקיים: $\lim_{x\to p} f(x) = l_1$ וכמו כן מתקיים $\lim_{x\to p} g(x) = l_2$. אזי:

א) $\exists \lim_{x\to p}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l_1 + \beta l_2$.
ב) $\exists \lim_{x\to p}(f(x)\, g(x)) = l_1 l_2$
ג) $\exists \lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

הוכחה: ההוכחה היא לפי סדרות וע"פ היינה.

משפט: $\lim_{x\to p} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to p} g(x) = l_2$.

1. אם $l_1 = \pm\infty$, $l_2 \in R$ אזי $\lim_{x\to p}(f(x) + g(x)) = \pm\infty$.
2. $\lim_{x\to p}(f(x)\, g(x)) = \begin{cases} \pm\infty\,; l_1 > 0 \\ \mp\infty\,; l_1 < 0 \end{cases}$.
3. אם $\lim_{x\to p}|f(x)| = +\infty$ אזי $\lim_{x\to p} \frac{1}{f(x)} = 0$.
4. אם $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ ו-$f(x) > 0$ בסביבה של P. אזי $\lim_{x\to p} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ואם ו-$f(x) < 0$ בסביבה של P מתקיים עבור הפונקציה $\lim_{x\to p} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

אי הגדרות:

1. $0 \cdot (\pm\infty)$
2. $\infty - \infty$
3. $\frac{0}{0}$
4. $\frac{\infty}{\infty}$

דוגמא:

1. פונקציה רציונאלית $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{i=0}^{m} a_0 x^i}$. נסמן n=degP ו-m=degQ.

ומתקיים $\lim_{x\to +\infty} R(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n}(+\infty)\,; n > m \\ \frac{a_n}{b_n}\,; n = m \\ 0\,; n < m \end{cases}$ ע"פ הכללים שלמדנו בתיכון, ניתן להוכיח ע"י חלוקה של כל האיברים בחזקה הגבוהה ביותר.

2. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + nx + \cdots - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(n + \frac{n(n-1)}{2}x + \cdots + x^{n-1}\right) = n$.

ניתן להשתמש גם בסימונים של למבדאו:

דוגמאות:

1. $x^2 = o(x)$ וגם $x \to 0$ מתקיים $\frac{x^2}{x} = x \to_{x\to 0} 0$.
2. $x \to 0$, $\sin x \sim x$ ואז $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

גבול של פונקציה מונוטונית:

נניח f מונוטונית עולה: $x \geq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$ או f מונוטונית יורדת: $x \geq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y$.

שיעור השלמה - חנוכה

<u>משפט</u>: $f:(a,b)\to R$.

1. אם f מונוטונית עולה אזי קיים גבול ל-f(x) כך ש-$\lim_{x\to b} f(x)=\sup_{x\in(a,b)} f(x)$ וגם $\lim_{x\to a} f(x)=\inf_{x\in(a,b)} f(x)$.
2. אם f מונוטונית יורדת אזי קיים גבול ל-f(x) כך ש-$\lim_{x\to b} f(x)=\inf_{x\in(a,b)} f(x)$ וגם $\lim_{x\to a} f(x)=\sup_{x\in(a,b)} f(x)$.

הוכחה:

נבחר רק את המקרה של מונוטונית עולה, כי ניתן פשוט להפוך את ההוכחה עם $-f$ בשביל המונוטונית יורדת . ונגדיר בהתאם את הסופרימום $q:=\sup_{x\in(a,b)} f(x)$. מתקיים $\forall x\in(a,b)\ f(x)\le q$. נקבע $q'<q$, מתקיים $q'<f(x_0)\le q$ ולכן מתקיים כי קיים $x_0\in(a,b)$ כך ש-$q'<f(x_0)\le q$. ואז $\forall x>x_0: f(x)>f(x_0)\ and\ then\ q'<f(x_0)<f(x)\le q$. ואז לכל $q'<q$ קיים $x_0\in(a,b)$ כך שלכל $x\in(x_0,b)$ מתקיים $f(x)\in(q',q]$ ואז ברור כי מתקיים $(x_0,b)=(a,b)\cap(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$. נגדיר $\varepsilon:=b-x_0$ ואז ע"פ הגדרה $\lim_{x\to b} f(x)=q$.

מסקנה: אם $f:(a,b)\to R$ מונוטונית וחסומה אז קיימים $\lim_{x\to b} f(x),\lim_{x\to a} f(x)$ סופיים !

<u>גבולות חד צדדים</u>:

הגדרה: $f:A\to R$, $p\in LimA$ אזי נגדיר: $\lim_{x\to p-0,\ x\in A} f(x):=\lim_{x\to p,\ x\in(-\infty,p)\cap A} f(x)$ וגם $\lim_{x\to p+0,\ x\in A} f(x):=\lim_{x\to p,\ x\in(p,+\infty)\cap A} f(x)$.

דוגמא: $f(x)=sign\ x=\begin{cases}1\,;x>0\\0\,;x=0\\-1\,;x<0\end{cases}$. מתקיים $\lim_{x\to 0+0} f(x)=1$ וגם $\lim_{x\to 0-0} f(x)=-1$.

הערה: $x_0\in(a,b)$ וגם $f(a,b)\to R$ מתקיים כי קיים גבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ אמ"מ $\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ ואז הגבול של הפונקציה בנקודה הוא כמו של הצדדיים.

מסקנה: אצל פונקציות מונוטונית יש גבולות חד צדדיים.

<u>גבול של פנקציית הרכבה: (Superposition)</u>

הגדרה: $A,B\subset R$ וקיימות פונקציות $f:A\to B, g:B\to R$ נגדיר $x\in A: h(x)=g(f(x))$ נסמן $h:=g\cdot f$ ולכן $h:A\to R$.

דוגמא: $f(x)=x^2, g(y)=siny$ ולכן אם נסמן $h=g\cdot f$ ולכן $h(x)=\sin x^2$.

<u>משפט</u>: $f:A\to B, g:B\to R$ נניח ש-$q\in LimB$ ו-$p\in LimA$ ומתקיים:

1. $\lim_{x\to p} f(x)=q$
2. $\lim_{x\to p} g(x)=l$
3. $\forall x\ne p: f(x)\ne q$. אזי קיים $\lim_{x\to p} h(x)=l$.

הוכחה: $x_n\to p, x_n\ne p, x_n\in A$. האם מתקיים $h(x_n)\to l$?. מתקיים $\lim_{x\to p} f(x)=q$ ומכאן נגדיר $y_n:=f(x_n)\to q$ לפי מה שצריך היה להוכיח מתקיים $y_n\ne q$ ולכן $\lim_{y\to q} g(y)=l$ ומכאן $g(y_n)\to l$ ולכן $g(y_n)=g(f(x_n))=h(x_n)$ קיבלנו כי ע"פ הגדרת הגבול מתקיים $\lim_{n\to\infty} h(x_n)\to l$ ולכן $\lim_{x\to p} h(x)=l$.

דוגמא נגדית (כדי להראות את הכרחיות התנאי השלישי):

עבור x ממשי נגדיר, $f(x)=0$ וגם $g(y)=\begin{cases}1\,,x\ne 0\\0\,,x=0\end{cases}$. מתקיים $\lim_{x\to 0} f(x)=0=q$ וגם $\lim_{y\to q} g(y)=1=l$ אבל כמו כן מתקיים כי $h(x)=g(f(x))=g(0)=0$ ומכאן קיבלנו כי $\lim_{x\to 0} h(x)=0\ne 1$.

שיעור השלמה - חנוכה

דוגמאות: $\alpha \neq 0$.

1. $\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{\frac{y}{\alpha}}=\alpha\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=\alpha$.
2. $\lim_{x\to0}\frac{\sin\sin(x)}{\sin(x)}$ ונגדיר $y:=\sin x$ ולכן $\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=1=\lim_{x\to0}\frac{\sin\sin(x)}{\sin(x)}$.
3. נסמן $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}\,,x\neq0\\ 0\,,x=0\end{cases}$ מתקיים $f\left(\frac{1}{\pi k}\right)=0$. נסמן $x_n=\frac{1}{n\pi}$ ומתקיים $f(x_n)=0\to0$ נסמן $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ ולכן $f(y_n)=1\to1$ אין גבול סופי לפונקציה. ע"פ תנאי קושי $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:x',x''\in(-\delta,\delta)$ נמשיך על פי התנאי ונקבל כי מתקיים $\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|<\varepsilon$ ולכן $0<x'=\frac{1}{k\pi}<\delta$ וגם $0<x''=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}<\delta$ אבל מתקיים $\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|=1$ לכן עבור $\varepsilon<1$ לא קיים δ כזה.

פרק 5 - פונקציות רציפות

$f:A\to R$, $p\in A$, $A\subset R$. הגדרה f רציפה בנקודה p: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in A\,,x\in U_\delta(P):\left|f(x)-f(p)\right|<\varepsilon$.

משפט:

1. אם $p\in A$ היא נקודה מבודדת אזי f תמיד רציפה ב-p.
2. אם $p\in A$ ו-$p\in LimA$ אזי f רציפה ב-p אמ"ם $\exists\lim_{x\to p}f(x)=f(p)$.

טרמינולוגיה: f רציפה ב-A אם f רציפה בכל $p\in A$ ונסמן $f\in C(A)$ כאשר C מסמל *Continuous*.

משפט: $f,g:A\to R$ אם f,g רציפות ב-P אזי:

1. $\alpha f+\beta g$ רציפה ב-P.
2. $f(x)g(x)$ רציפה ב-P.
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ רציפה ב-P, אם $g(p)\neq0$

משפט: $f:A\to B,g:B\to R,h:A\to R$. ונסמן $h=g(f(x))$. אם f רציפה ב-p ו-g רציפה ב-$q=f(p)$ אזי h רציפה ב-p.

הוכחה: גבול של פונקציה- הרכבה. יהי $\varepsilon>0$. מתקיים $\exists\delta_1>0:\forall y\in U_{\delta_1}(q)\ \left|g(y)-g(q)\right|<\varepsilon$ ידוע כי f רציפה ב-P לכן מתקיים $\exists\delta_2>0:\ \forall x\in A,x\in U_{\delta_2}(P):\left|f(x)-f(p)\right|<\delta_1$ אם מתקיים $x\in A$ אזי $x\in U_\delta(P):y=f(x)\in U_{\delta_1}(q)$ ומכאן נובע כי $\left|g\big(f(x)\big)-g(q)\right|<\varepsilon\ and\ then\ \left|h(x)-h(p)\right|<\varepsilon$.

דוגמאות:

1. נבחר את פונקציית דריכלה $\chi(x)=\begin{cases}1\,;x\in Q\\0\,;x\notin Q\end{cases}$, שהיא $\chi:R\to R$ ומתקיים $\forall p\in R\ \exists\lim_{x\to p}\chi(x)$.
2. $f(x)=\begin{cases}1\,,x\neq0\\0\,,x=0\end{cases}$ אם p=0 לא קיים גבול כי $\lim_{x\to p}f(x)=1\neq f(0)=0$.

מיון של נקודות אי רציפות:

הגדרה: $f:A\to R$ כאשר $p\in A$.

1. P נקודת אי רציפות מסוג ראשון אם $\begin{cases}\exists\lim_{x\to p-0}f(x):=f(p-0)\\\exists\lim_{x\to p+0}f(x):=f(p+0)\end{cases}$ סופיים. אבל $f(p-0)\neq f(p+0)$. או אפשר גם לכתוב $f(p)\neq f(p-0)=f(p=0)$.
2. P נקודת אי רציפות מהסוג שני אם היא אינה מהסוג הראשון.

שיעור השלמה - חנוכה

דוגמאות:

1. $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} ; x\neq 0\\ 0 ; x=0\end{cases}$ 0 היא נקודת אי רציפות מסוג 2.
2. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} ; x\geq 0\\ 0 ; x\leq 0\end{cases}$ 0 נקודת אי רציפות מסוג ראשון מכיוון ש$\lim\limits_{x\to p+0} f(x)$ לא סופי.

<u>משפט</u>: $f:(a,b)\to R$ אם f מונוטונית אז יש לה נקודות אי רציפות רק מסוג אחד.

הוכחה: נניח f מונוטונית עולה. יהי $x_0\in(a,b)$ וגם מתקיים כי קיים $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. $x<x_0 \Longrightarrow f(x)\leq f(x_0)$.

מתקיים: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\sup f(x)\leq f(x_0)$ וגם $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\inf f(x)\geq f(x_0)$.

<u>משפטים יסודיים על פונקצית רציפות</u>:

<u>משפט ערך ביניני של קושי</u>:

<u>משפט</u>: $f:[a,b]\to R$ רציפה ב$[a,b]$. לכל $y\in[f(a),f(b)]$ (ב.ה.נ.כ. $f(a)<f(b)$) קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך שf(c)=y.

הוכחה: נחליף $f(x)=y$מתקיים $f(b)\leq y\leq f(b)$ ונגדיר $g(x):=f(x)-y$. מתקיים $g(b)\leq 0 , g(a)\geq 0$. צ"ל c כך שg(c)=0. נגדיר: $\mathrm{E}:=\{x\in[a,b]: g(x)\leq 0\}$ מתקיים $a\in E$ מתקיים גם $a\in[a,b]$. נגדיר: $\sup\limits_{x\in A} g(x)=:c$. מתקיים כי תמיד $\forall n\in N\ \exists x_n\in E : c-\frac{1}{n}<x_n\leq c$ ידוע f רציפה בc לכן $g(x_n)_{n\to\infty}=g(c)$ ידוע כי גם $x_n\in E : g(x_n)\leq 0$ ולכן מיידית מתקיים $g(c)\leq 0$ נניח $g(c)<0$. מתקיים $\lim\limits_{x\to c} g(x)=g(c)<0$ ולכן $\exists\delta>0\ \forall x\in(c-\delta,c+\delta)$ ומכאן $g(x)<0$ גם $g\left(c+\frac{\delta}{2}\right)<0$ לכן $c+\frac{\delta}{2}$ נמצא בE. וידוע כי $c+\frac{\delta}{2}>c=supE$ בסתירה. מכאן שg(c)=0 . מ.ש.ל.

מסקנה: <a,b> אם f רציפה ב(a,b) אזי f(<a,b>)=<c,d>. תנאי מספיק, אך לא הכרחי.

<u>משפט</u>: אם f מונוטונית ב<a,b> וב-f(<a,b>) אזי f רציפה ב<a,b>.

הוכחה: x_0 נקודת אי רציפות. לכן $\exists f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ וגם $\exists f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. נניח $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$ ואם ניקח f עולה ונקבל $f(x_0+0)>f(x_0-0)$. ניקח, על פי הלמה של דדקינד, $f(x_0+0)>y>f(x_0-0)$. בגלל שf מונוטונית עולה, מתקיים $\forall x\leq t : f(x)\leq f(t)$, וגם $t\leq x_0$ ומכאן נובע $f(x)\leq \lim\limits_{t\to x_0-0} f(t)=f(x_0-0)$. כמו כן גם לכל $x\leq t<x_0$ מתקיים $f(x)\leq f(t)$. עבור $t>x_0$ מתקיים $t\to x_0+0$ ולכן $f(x_0+0)=\lim\limits_{t\to x_0} f(t)\leq f(x)$.

מתקיים: $\forall x<x_0 : f(x)\leq f(x_0-0), \forall x>x_0 : f(x)\geq f(x_0-0)$ ומכאן שf לא מקבלת ערך y . $\forall x\in(0,b): f(x)\neq y$.

<u>משפט של Weierstrass על max וmin</u>:

<u>משפט</u>: תהי $f:[a,b]\to R$ רציפה בכל נקודה ב[a,b]. אזי:

1. f חסומה על [a,b]
2. קיים $x_{max}\in[a,b]$ כך ש$f(x)\underset{x\in[a,b]}{\max}=f(x)\underset{x\in[a,b]}{\sup}=f(x_{max})$ וגם קיים $x_{min}\in[a,b]$ כך שמתקיים עבורו, בהתאם, $f(x)\underset{x\in[a,b]}{\min}=f(x)\underset{x\in[a,b]}{\inf}=f(x_{min})$.

דוגמאות:

1. $f:[-1,1]\to R$ נגדיר $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} \ ;\ x\neq 0\\ 0 ; x=0\end{cases}$ לא חסומה ולא רציפה.
2. $f:(0,1]\to R$ ונגדיר $f(x)=\frac{1}{x}$ לא חסומה.
3. $f:[0,\infty)\to R$ ונגדיר f(x)=x לא חסומה.

שיעור השלמה - חנוכה

הוכחה :

1. נניח שf אינה חסומה אז $\forall n \in N, \exists x_n \in [a,b]: |f(x_n)| > n$. ידוע כי $a < x_n < b$ ולכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה. לפי הלמה של $W.B$ קיימת תת סדרה $x_{n_k} \to x_0 \in R$ וגם $a \le x_{n_k} \le b$. עבור $k \to \infty$ מתקיים $a \le x_0 \le b$ ומכאן $x_0 \in [a,b]$, ומכאן שf רציפה בנקודה x_0. לכן $f_{n_k} \to_{k\to\infty} x_0$ ומכאן $f(x_{n_k}) \to_{k\to\infty} f(x_0)$. אזי $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| \to |f(x_0)|$ ומצד שני $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| > n_k \to +\infty = |f(x_0)|$. אזי $\lim_{k\to\infty} \left|f\left(x_{n_k}\right)\right| = |f(x_0)|$. סתירה, לכן בהכרח שהיא חסומה.
2. נסמן $M \coloneqq \sup f(x), x \in [a,b]$. וגם $m \coloneqq \inf f(x), x \in [a,b]$. נניח בשלילה ש$f$ לא מקבלת ערך M. בכתיב מתמטי זאת אומרת $\forall x \in [a,b]: f(x) \ne M$ אלא $\forall x \in [a,b]: f(x) \le M$ ומכאן $\forall x \in [a,b]: f(x) < M$. נגדיר : $g(x) \coloneqq \frac{1}{M-f(x)}$ ונקבל $f \in C[a,b]$ ומכאן $M - f(x) \in C[a,b]$ ולכן $M - f(x) \ne 0$ ומכאן שגם $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ גם רציפה ב*[a,b]*. לפי תכונה 1 g חסומה ב*[a,b]*. אזי $\forall x \in [a,b]: 0 < g(x) \le C$ ואז מתקיים $\frac{1}{M-f(x)} \le C$ ונקבל $f(x) \le M - \frac{1}{c}$ ומצאנו חסם עליון קטן יותר, בסתירה ! לכן בהכרח שהחסם העליון בקטע הסגור *[a,b]*.