אינפי 1 - תרגיל 6

1. הוכח/הפרך:

a. אם הטור $\sum b_n$ מתכנס, אזי הטור $\sum \frac{1}{b_n}$ מתבדר

הוכחה: $\sum b_n$ מתכנס ולכן $b_n \to 0$ ולכן $\frac{1}{b_n}$ לא מוגדר או לא חסום ובכל מקרה אינו שואף לאפס ולכן הטור $\sum \frac{1}{b_n}$ בוודאי מתבדר.

b. אם הטור החיובי $\sum a_n$ מתבדר, אזי $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ גם מתבדר

הוכחה: נניח בשלילה ש $\sum a_n$ מתבדר אבל $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס. לכן $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$ ולכן $\frac{a_n}{1+a_n} = \frac{1+a_n}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_n} = 1 - \frac{1}{1+a_n} \to 0$ ולכן $\frac{1}{1+a_n} \to 1$ ולכן $\frac{1}{\frac{1}{1+a_n}} = 1+a_n \to \frac{1}{1} = 1$ ולכן $a_n \to 1-1=0$. ניקח $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon = \frac{1}{2}$. ולכן $-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}$ ולכן $\frac{1}{2} \le 1+a_n \le 1+\frac{1}{2}$ לכל $n > n_0$. ולכן $\frac{2}{3}a_n \le \frac{a_n}{1+a_n} \le 2a_n$. אבל $\sum a_n$ טור חיובי שמתבדר ולכן גם $\sum \frac{2}{3}a_n = \frac{2}{3}\sum a_n$ טור חיובי שמתבדר ולפי מבחן ההשוואה $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתבדר.

הערה: הראנו את היחס בין איברי הטורים רק עבור $n > n_0$, אבל בדומה לסדרות, שינוי מספר סופי של איברים לא משנה את התכנסות או התבדרות הטור (על אף שהוא יכול לשנות את סכומו של הטור).

c. אם הטור החיובי $\sum a_n$ מתכנס, אזי גם $\sum a_n^2$ מתכנס

הוכחה: $\sum a_n$ מתכנס ולכן $a_n \to 0$. ניקח $\varepsilon = 1$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיימים $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon = 1$ ולכן $a_n^2 = |a_n|^2 = |a_n| \cdot |a_n| \le 1 \cdot |a_n| = |a_n|$ אבל $\sum a_n$ טור חיובי ולכן $|a_n| = a_n$ ולכן קיבלנו $a_n^2 \le a_n$ ושוב לפי מבחן ההשוואה $\sum a_n^2$ מתכנס. (ההערה מהסעיף הקודם תקפה גם כאן).

2. תהיי הסדרה החשבונית $a_{n+1}=a_n+d$. לאילו ערכים של a_1 ו d הטור $\sum a_n$ מתכנס?

פתרון: $a_n=a_1+d+d+...+d=a_1+nd$. נניח שהטור $\sum a_n$ מתכנס, לכן $a_n\to 0$ כלומר $a_1+nd\to 0$ ולכן בהכרח $d=0$ אחרת a_n שואף לפלוס או מינוס אינסוף ולכן $a_1\to 0$ כלומר גם $a_1=0$. במקרה היחיד הזה $\sum a_n=\sum 0=0$ והטור אכן מתכנס.

3. חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}$

פתרון: למדנו בכיתה ש $\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{q}{1-q}$. ולכן עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}$. ולכן

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ (הערה: שימו לב שזה המספר העשרוני $0.\overline{333}$).

4. חשב את סכומי הטורים:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

פתרון: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$ לכן $A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)=1$

נציב $n=0,-1,-2$ ונקבל $A=\frac{1}{2},B=-1,C=\frac{1}{2}$ ולכן

$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$. ננסה להבין איך נראים הסכומים החלקיים. נסמן

$a_n=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$ ונסתכל על הסכום של 3 איברים עוקבים $a_{n-1}+a_n+a_{n+1}$. רואים ש

$-\frac{1}{n+1}$ האיבר האמצעי של a_n מתאפס על ידי הסכום של האיבר השמאלי של a_{n+1} שהוא

$\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2(n+1)}$ והאיבר הימני של a_{n-1} שהוא $\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2(n-1+2)}$ כי

$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+2}$.

נסתכל על הסכום הכללי S_N, ונראה אילו איברים לא מתאפסים:

שני האיברים הראשונים של a_1 (האיבר השמאלי מאפס איברים קודמים שאינם, והאיבר האמצעי מתאפס על ידי איבר קודם שחסר). האיבר השמאלי של a_2 שלא מתאפס כי הוא אמור לאפס את האמצעי של a_1 שכבר דנו בו. בנוסף האיברים הימני והשמאלי של a_N אינם מתאפסים כי חסר a_{N+1}

ולכן גם האיבר הימני של a_{N-1} לא מתאפס כי האמצעי של a_N לא התאפס. סה"כ קיבלנו ,

$S_N=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$. ולכן $S_N\to\frac{1}{4}$ כלומר סכום הטור הינו $\frac{1}{4}$.

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$

פתרון: $\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{A}{n+2}+\frac{B}{n+3}$

נמשיך בפתרון, $A(n+3)+B(n+2)=1$ נציב $n=-2,-3$ ונקבל $A=1,B=-1$ ולכן

$\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$. בסכום הכללי S_N רוב האיברים מתאפסים פרט לאיבר הראשון של

a_1 ולאיבר האחרון של a_n ולכן $S_N=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$ ולכן $S_N\to\frac{1}{3}$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{1}{3}$.

c. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ רמז: זכרו ש $\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$, ודעו שאם $a_n\to 1$ אזי $\ln a_n\to 0$.

פתרון: $\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}=\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$.

$$S_N=\ln\left(\frac{1(1+2)}{(1+1)(1+1)}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{1(1+2)}{(1+1)(1+1)}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)=$$

לכן הרוב מצטמצם פרט ל $=\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$1+\frac{1}{n+1}\to 1$ ולכן $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\to 0$ ולכן $S_N\to\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ולכן סכום הטור הוא $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

5. קבע האם הטורים הבאים מתכנסים או לא (והוכח):

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

פתרון: נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים $S_1=-1,S_2=-1+1=0,S_3=-1,\ldots$. קל להוכיח באינדוקציה ש $\{S_n\}=-1,0,-1,0,-1,0,\ldots$, לכן לסדרת הסכומים החלקיים אינה מתכנסת ולכן לפי הגדרה הטור אינו מתכנס.

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln 3)^n}$

פתרון: לפי מבחן קושי $\sqrt[n]{\frac{n^3}{(\ln 3)^n}}=\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\ln 3}\to\frac{1}{\ln 3}<1$ ולכן הטור מתכנס.

c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$

פתרון: לפי מבחן המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)2^n}{n!}}=\frac{2(n+2)}{(n+1)^2}\to 0$ ולכן הטור מתכנס.

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

פתרון: לפי מבחן קושי $\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\frac{1}{\ln n}\to 0$ ולכן הטור מתכנס.

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}$

פתרון: לפי מבחן המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n+2}{n(n+1)}}=\frac{n(n+3)}{(n+2)^2}\to 1$ לא ניתן לפתור את השאלה

בעזרת מבחן זה. ננסה לפתח את הביטוי $\frac{2}{n^2+n}+\frac{1}{n+1}=\frac{1+\frac{2}{n}}{n+1}=\frac{n+2}{n(n+1)}$. כעת

$\frac{2}{n^2}\le\frac{2}{n^2+n}$ ולכן לפי מבחן ההשוואה $\sum\frac{2}{n^2+n}$ מתכנס. אבל $\sum\frac{1}{n+1}$ מתבדר, ולכן

הטור כולו מתבדר.

פתרון נוסף:

נסתכל על $\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$ ולכן $1<\frac{a_n}{\frac{1}{n}}<2$ ולפי מבחן ההשוואה השני הטור מתבדר

כמו הטור ההרמוני $\sum\frac{1}{n}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$

פתרון: $\frac{1}{n^3+1}\le\frac{1}{n^3}\le\frac{1}{n^2}$ ולפי מבחן ההשוואה הטור מתכנס.

g. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^n}$ עבור $a>0$ קבוע.

פתרון: זהו טור חיובי לפי הנתון, ולכן לפי מבחן המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{a^{n+1}}}{\frac{n!}{a^n}}=\frac{n+1}{a}\to\infty>1$ ולכן הטור מתבדר.

h. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

פתרון: קל לראות שזו סדרה מונוטונית יורדת לאפס חיובית, (כי גם n וגם $\ln n$ מונוטוניות עולות לאינסוף). לכן נפעיל את מבחן העיבוי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln\left(2^n\right)}$ מתכנס. אבל זה שווה ל $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2}=\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln\left(2^n\right)}$ וזה מתבדר ולכן כך גם הטור המקורי.

6. הוכח:

a. אם $\sum|a_n|$ מתכנס אזי $\sum a_n$ מתכנס (רמז: תנאי קושי לסדרות)

הוכחה:

לפי הגדרה, טור מתכנס אם"ם סדרת הסכומים החלקיים שלו מתכנסת. נסמן ב S_n את סדרת הסכומים החלקיים של $\sum|a_n|$ וב D_n את סדרת הסכומים החלקיים של $\sum a_n$.

נתון ש S_n מתכנסת ולכן מקיימת את תנאי קושי. כלומר, לכל אפסילון, קיים N_ε כך שלכל $m>n>N_\varepsilon$ מתקיים $|S_m-S_n|<\varepsilon$.

לכן,

$$|S_m-S_n|=|(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_m|)-(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|)|=|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_m|<\varepsilon$$

נבחן את $|D_m-D_n|=|(a_1+a_2+\ldots+a_m)-(a_1+a_2+\ldots+a_n)|=$

$$=|a_{n+1}+\ldots+a_m|\le|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_m|<\varepsilon$$

כפי שרצינו.

b. אם הטורים $\sum a_n^{\,2}$ ו $\sum b_n^{\,2}$ מתכנסים אזי הטור $\sum a_nb_n$ מתכנס (רמז: הראה קודם ש $\sum|a_nb_n|$ מתכנס)

הוכחה: $(|a_n|-|b_n|)^2=a_n^{\,2}-2|a_nb_n|+b_n^{\,2}\le a_n^{\,2}+b_n^{\,2}$.

$\sum a_n^{\,2}$, $\sum b_n^{\,2}$ מתכנסים ולכן הסכום שלהם $\sum a_n^{\,2}+b_n^{\,2}$ מתכנס ולפי מבחן ההשוואה $\sum(|a_n|-|b_n|)^2$ מתכנס. אבל $|a_nb_n|=\frac{a_n^{\,2}+b_n^{\,2}-(|a_n|-|b_n|)^2}{2}$ לכן

$\sum|a_nb_n|=\frac{1}{2}\sum a_n{}^2+b_n{}^2-(|a_n|-|b_n|)^2$ הטור הימני הוא סכום של טורים מתכנסים, ולכן גם הטור השמאלי מתכנס.

לפי סעיף א', גם הטור $\sum a_nb_n$ מתכנס.

c. אם הטור $\sum a_n{}^2$ מתכנס, אזי הטור $\sum\frac{|a_n|}{n}$ מתכנס

הוכחה:

ניקח $b_n=\frac{1}{n}$. ידוע ש $\sum b_n{}^2=\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס. ולכן $\sum|a_nb_n|$ מתכנס לפי סעיף ב' ולכן $\sum|a_nb_n|=\sum\frac{|a_n|}{n}$ מתכנס.

d. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס לכל סדרה חסומה b_n [ממבחן של פרופסור זלצמן] (רמז: סעיף א')

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח שהטור מתכנס כלומר $\sum|a_n|<\infty$. תהי b_n סדרה חסומה כלשהי, לכן קיים k כך ש $|b_n|\le k$ ולכן $|a_nb_n|=|a_n||b_n|\le k|a_n|$ ולפי מבחן ההשוואה $\sum|a_nb_n|<\infty$ ולפי סעיף א' גם $\sum a_nb_n$ מתכנס.

$\Rightarrow$ ניקח את הסדרה $b_n=\frac{|a_n|}{a_n}$. $|b_n|=\left|\frac{|a_n|}{a_n}\right|=1$ לכן b_n סדרה חסומה. ולכן לפי הנתון $\sum a_nb_n<\infty$ אבל $\sum a_nb_n=\sum a_n\frac{|a_n|}{a_n}=\sum|a_n|$ כלומר $\sum a_n$ מתכנס בהחלט כפי שרצינו.

(הרעיון פה היה לקחת את b_n להיות סדרה שמתקנת את הסימן של האיברים השליליים שכן אם $a_n\ge 0$ אז $b_n=1$ ואם $a_n<0$ אז $b_n=-1$)