פתרון לתרגיל 2 באינפי 3

1. כל הטענות לא נכונות

(א) נבחר $A = B((0,0),1)$ ו $B = B((100,100),1)$ ניתן להגדיר שתי קבוצות פתוחות (נניח $B((0,0),2)$ ו $B((100,100),2)$) שהן זרות וביחד מכילות את $A \cup B$.

(ב) המלבנים

$$[0,3] \times [0,1], \quad [2,3] \times [0,3]$$

הם קבוצות קשירות. החיתוך שלהם לא ריק ($(2,0)$ נמצא שם) ולכן

$$[2,3] \times [0,3] \cup [0,3] \times [0,1]$$

היא קבוצה קשירה.

בדומה, המלבנים

$$[0,1] \times [0,3], \quad [0,3] \times [2,3]$$

הם קבוצות קשירות. החיתוך שלהם לא ריק ($(0,2)$ נמצא שם) ולכן

$$[0,1] \times [0,3] \cup [0,3] \times [2,3]$$

היא קבוצה קשירה.

החיתוך של שתי קבוצות קשירות אלה הוא

$$([2,3]\times[0,3]\cup[0,3]\times[0,1])\cap([0,1]\times[0,3]\cup[0,3]\times[2,3]) = [0,1]\times[0,1]\cup[2,3]\times[2,3]$$

וזאת לא קבוצה קשירה כי נוכל לקחת את הקבוצות

$$(-0.1, 1.1) \times (-0.1, 1.1) \quad (1.9, 3.1) \times (1.9, 3.1)$$

שהן קבוצות פתוחות וזרות וכל הקבוצה מוכלת בהן.

(ג) נבחר את

$$A = [0,3] \times [0,1] \quad B = [1,2] \times [0,1]$$

ואז נקבל ש

$$A \backslash B = [0,1) \times [0,1] \cup (2,3] \times [0,1]$$

שזאת קבוצה לא קשירה כי היא מוכלת בקבוצות הפתוחות והזרות

$$(-0.1, 1) \times (-0.1, 1.1), \quad (2, 3.1) \times (-0.1, 1.1)$$

.2

(א) נכון. אם A,B קומפקטיות אז שתיהן סגורות וחסומות. איחוד (של מספר סופי) של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה ולכן $A\cup B$ סגורה.
בנוסף, איחוד קבוצות חסומות הוא חסום כי אם A מוכלת בכדור $B(0,r_A)$ ו B מוכלת בכדור $B(0,r_B)$ אז $A\cup B$ מוכלת בכדור $B(0,\max\{r_A,r_B\})$.
ולכן $A\cup B$ סגורה וחסומה ולכן קומפקטית.

(ב) נכון. בדומה ל א'. חיתוך קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה. חיתוך קבוצות חסומות היא קבוצה חסומה (כי אם A מוכל ב $B(0,r_A)$ אז גם $A\cap B$ מוכל שם). ולכן $A\cap B$ סגורה וחסומה ולכן קומפקטית.

(ג) לא נכון. נבחר $A=[0,2]$ ו $B=[0,1]$ אז $A\backslash B=(1,2]$ שזאת לא קבוצה סגורה ולכן לא קומפקטית.

(ד) לא נכון. נבחר $A_n=\{n\}$ ואז $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\mathbb{N}$ שזאת קבוצה לא חסומה ולכן לא קומפקטית.

.3

(א) נכון. אם A נמצאת בכדור $B(0,r_A)$ ו B נמצאת בכדור $B(0,r_B)$ אז נגדיר $r=r_A+r_B$ ואז יתקיים שאם $x\in A+B$ אז

$$||x||=||a+b||\leq ||a||+||b||\leq r_A+r_B=r$$

ולכן $x\in B(0,r)$ כלומר $A+B\subseteq B(0,r)$. לכן $A+B$ חסומה.

(ב) נכון. נוכיח דבר יותר חזק שיוכיח גם את ד. נראה שאם A פתוחה ו B קבוצה כלשהיא אז $A+B$ פתוחה. תהי $x\in A+B$ נוכיח כי x נקודה פנימית של $A+B$. ניתן לכתוב $x=a+b$ כאשר $b\in B\quad a\in A,$. בגלל ש A פתוחה, קיים $r>0$ כך ש $B(a,r)\subseteq A$. אנו נראה ש $B(x,r)\subseteq A+B$. יהי $y\in B(x,r)$ אזי $||y-x||<r$ כלומר

$$||y-a-b||=||(y-b)-a||<r$$

ולכן

$$y-b\in B(a,r)\subseteq A$$

אבל $y=y-b+b$ היות ו $y-b\in A,\quad b\in B$ קיבלנו ש $y\in A+B$ ולכן $B(a,r)\subseteq A+B$.

(ג) לא נכון. בתוך $\mathbb{R}^2$ נבחר $A=\{(x,y)\mid x=0\}$ ו $B=\{(x,\frac{1}{x})\mid x>0\}$ אז נקבל ש $A+B=\{(x,y)\mid x>0\}$ שזאת לא קבוצה פתוחה.

(ד) הוכחנו בסעיף ב'.

(ה) לא נכון. בתוך $\mathbb{R}^2$ נבחר $B=\{(x,y)\mid x=0\}$ ו

$$A=\{(x,y)\mid y=0,\quad x\in[0,1]\}$$

אז B סגורה ו A קומפקטית אבל $A+B=\{(x,y)\mid x\in[0,1]\}$ שזאת לא קבוצה קומפקטית.

(ו) נכון. הוכחנו כבר ש $A+B$ סגורה וראינו בסעיף א' ש $A+B$ חסומה לכן היא סגורה וחסומה ולכן קומפקטית.

4. ראינו שאפשר לחשב גבול של סדרה רכיב רכיב ולכן פשוט נחשב את הגבולות של הרכיבים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+4n+5}{n^6+2n^2+3}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=e^{-1}$$

לכן הגבול של הסדרה הוא

$$(0,e^{-1})$$

5. הטענה לא נכונה אפילו ב $\mathbb{R}$. נבחר $x_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$ ואז הסדרה חסומה כי $|x_n|<1$. אבל $y_n=d(x_n,0)=|x_n|=1-\frac{1}{n}$ זאת סדרה עולה ממש. ברור ש x_n לא מתכנסת.