פתרון תרגיל 5

27 באוגוסט 2013

שאלה 1 פתרון בקורס קיץ תשע"ב תרגיל 5 שאלה 5

שאלה 2 פתרון בקורס קיץ תשע"ב תרגיל 5 שאלה 2. בנוסף כיוון שהעתקה חח"ע ועל $kerT=\{0\}, imT=span\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$

שאלה 3

סעיף א: $T(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix})=T(2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})=2T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-1T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ לכן $[T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}]_C=2\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$

לכן $T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=3(1+x)+6(1-x^2)+2x^2=9+3x-4x^2=9(1+x^2)+6.5(x-2x^2)-3.5x$

באותו אופן $T(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix})=T(3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})=3T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-2T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ לכן $[T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}]_C=3\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\3\end{pmatrix}$

לכן $T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=4(1+x)+8(1-x^2)+3x^2=12+4x-5x^2$

סעיף ב: $T(\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix})=T(5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})=5T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-4T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ לכן $[T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}]_C=5\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\12\\5\end{pmatrix}$

לכן $T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=6(1+x)+12(1-x^2)+5x^2=18+6x-7x^2=18(1+x^2)+12.5(x-2x^2)-6.5x$

ולכן המטריצה המציגת (בהסתמך על החישובים של הסעיף הקודם) היא $[T]_{C_1}^{B_1}=\begin{pmatrix}9&18\\6.5&12.5\\-3.5&-6.5\end{pmatrix}$

סעיף ג: $T(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})=T(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})=T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ לכן $[T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]_C=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

לכן $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1(1+x)+2(1-x^2)+1x^2=3+x-x^2$

בנוסף נתון כי $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1(1+x)+2(1-x^2)+0x^2=3+x-2x^2$

לכן המטריצה המיצגת לפי הבסיס הסטדנדרטי (עם החישובים של סעיף א) היא $\begin{pmatrix}3&3\\1&1\\-2&-1\end{pmatrix}$

שאלה 5 פתרון חלקי בקורס קיץ תשע"ב תרגיל 5 שאלה 9
שאלה 5 פתרון בקורס קיץ תשע"ב תרגיל 5 שאלה 10

שאלה 6 פתרון בקורס קיץ תשע"ב תרגיל 5 שאלה 11
שאלה 7
סעיף א: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = ([T]_B^B = ([T(b_1)]_B, [T(b_2)]_B, [T(b_3)]_B, [T(b_4)]_B) = ([b_2]_B, [b_3]_B, [b_4]_B, [0]_B)$)
סעיף ב: באופן דומה $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [T]_B^B = ([b_2]_B, [0]_B, [b_1]_B, [0]_B)$
סעיף ג: באופן דומה $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [T]_B^B = ([b_2]_B, [b_2 + b_4]_B, [b_4]_B, [b_1 + 2b_3]_B)$
סעיף ד: באופן דומה
שאלה 8
נגדיר $T(1) = 1 + 3x, T(x) = 2$ עם הבסיס הסטנדרטי $B = \{1, x\}$
נגדיר $S(1) = 1 + 3(1 + x) = 4 + 3x, S(1 + x) = 2$ עם הבסיס $C = \{1, 1 + x\}$
נקבל $[T]_B = [S]_C = A$ (למשל $[S]_C = ([S(1)]_C, [S(1 + x)]_C) = ([1 + 3(1 + x)]_C, [2]_C) = A$)
שאלה 9
נעזר במשפט הדרגה $T : V \to W$ אזי $dim(kerT) + dim(imT) = dimV$
סעיף א: $dim(kerT) + 5 = 5$ ולכן $dim(kerT) = 0$
סעיף ב: $6 = dim(kerT) + 3$ ולכן $dim(kerT) = 3$
סעיף ג: $dim(kerT) + dim(imT) = 4$ כיוון ש $T \neq 0$ אזי $2 \geq dim(imT) > 0$ ולכן $dim(kerT) \in \{3, 2\}$
שאלה 10
נסמן $dimV = dimW = n$. לפי משפט הדרגה מתקיים $dim(kerT) + dim(imT) = n$
לכן T חח"ע אמ"מ $kerT = \{0\}$ אמ"מ $dim(kerT) = 0$ אמ"מ $dim(imT) = n = (dimW)$ אמ"מ $imT = W$ אמ"מ T על
שאלה 11
אם הוקטורים $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ בת"ל אזי יש העתקה לינארית יחידה כי הם מהווים בסיס ל V.
נחלק למקרים: אם $p = 2$ אזי קל לראות כי $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ בת"ל.
אחרת: נדרג את המטריצה המורכבת מוקטורים אלו $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^{-1}3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^{-1}3 \\ 0 & 0 & 2 - 2^{-1}9 \end{pmatrix}$
הוקטורים ת"ל אמ"מ $2 - 2^{-1}9 = 0$ אמ"מ $4 = 9$ זה קורה עבור $p = 5$ בלבד.
לכן עבור $p \neq 5$ יש העתקה לינארית יחידה
עבור $p = 5$ נקבל ש $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ולכן צריך להתקיים $T(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}) = -T(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$ מה שלא מתקיים ולכן אין העתקה לינארית כזאת.