שכן הקבוצה של הקבוצה שמוגדרת היא האינסוף הקטן ביותר.

אבל $\aleph_0 \neq |[0,1]|$

נניח שקיימת פונקציה מ-$\aleph_0$ ל-$[0,1]$ ⇐ הפונקציה לא חח"ע.

בין כל שני ממשיים יש אינסוף גדול יותר מ-$\aleph$.

הגדרה: עוצמת הקטע $[0,1]$ נקראת <u>עוצמת הרצף</u> ומסומנת $\aleph$. $|\mathbb{C}|=$

(ההבדל הוא בין הממשיים לרציונליים)

בין כל שני רציונליים יש בן מניה

בין כל שני ממשיים יש מספר מעוצמת הרצף

משפט (קנטור): לכל קבוצה C $\;|C| \overset{<}{\neq} |P(C)|$

הוכחה: נרצה להראות שאין פונקציה (⇐) על.

תהי $f: C \to P(C)$

נגדיר $S=\{x\in C \mid x\notin f(x)\}$ תת קבוצה של C ⇐ אם אין איבר כזה, אז S תהיה הקבוצה ריקה.

⇐ נראה של-S אין מקור ב-f.

הנחה מתחילה פה!

⇐ יהי $s'\in C$ איבר כלשהו <u>ונניח $S=f(s')$</u>

⇐ אם $s'\in S$ קיבלנו סתירה כי

ש- $S=f(s')$ $\;s'\notin$. ולכן $s'\notin S$

⇐ באופן דומה, אם $s'\notin S$

אז $S=f(s')\not\ni s'$ ⇐ $s'\in S$

⇐ לא קיים s' שהוא מקור.

דוגמא:	$\{1,2,3\}$
	$f(1)=\emptyset$
	$f(2)=\{1,2,3\}$
	$f(3)=\{2,3\}$
	$S=\{1\}$ → אין לה מקור

בדומה ההנחה ש $S=f(s')$ אינה נכונה, ולכן ל-S אין מקור ⇐ S' לא פונקציה.

⇐ <u>מסקנה</u>: יש אינסוף עוצמות אינסופיות.

$$\aleph_0 = 2^{\aleph_0}$$

$$\aleph_0=|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| < |P(P(\mathbb{N}))| < \dots$$

* אי אפשר לומר "הקבוצה העוצמתית" מכיוון שהיא גדולה מכדי להיות קבוצה.

10/12/13

נסמן $|P(C)| = 2^{|C|}$

← זה קשה להוכיח $\aleph = 2^{\aleph_0}$

← **השערת הרצף**. (בלתי תלויה באקסיומות המקובלות בעולם המתמטיקה).

אין קבוצה Z כך ש: $\aleph_0 < |Z| < 2^{\aleph_0}$

כלומר, אין קבוצה Z כך ש:

1) אין פונקציה על מ-N ל-Z

וגם 2) אין פונקציה על מ-Z ל-$[0,1)$

לא למבחן

⊗ אם יש קבוצה סופית עם n איברים $A=\{1,2,\dots,n\}$

אוסף תת הקבוצות שלה הוא $|P(A)| = 2^n$

⊗ $2^{\aleph_0} \cong [0,1]$

עוצמת קבוצת הסדרות האינסופיות של 0 ו-1 = עוצמת הקבוצה

תתי הקבוצות של N