

# מחלקות של שפות

$R$  מחלקת השפות הכריעות (השם הוא Recursive - מסיבות היסטוריות)  
 $RE$  מחלקת השפות הניתנות לזיהוי (Recursive Enumerable)  
 $R \subseteq RE$  שכן כל שפה שניתנת להכרעה - ניתנת לזיהוי. כיוון שני - לא בהכרח.

## הגדרה

תהי  $X$  קבוצה ותהי  $A \subseteq X$ . בנוסף, תהי  $f : X^k \rightarrow X$  פעולה.  
נאמר ש  $A$  סגורה תחת הפעולה  $f$  אם לכל  $a_1, \dots, a_k \in A$  מתקיים  $f(a_1, \dots, a_k) \in A$ .

## משפט

קבוצת השפות הכריעות סגורה תחת פעולת האיחוד.

## הוכחה

תהיינה  $A, B$  שתי שפות כריעות. אזי קיימות מכונות טיורינג  $M_A, M_B$  המכריעות אותן בהתאמה. בה"כ נניח כי שתי המכונות פועלות במודל  $B$ . נראה שקיימת מכונת טיורינג  $M$  במודל  $MT_2$  המכריעה את  $A \cup B$   
 $M(w)$

1. העתק את  $w$  מסרט 1 לסרט 2.
2. בשני הראשים חזור לתחילת הקלט.
3. נבצע סימולציה של ריצת  $M_A$  על סרט 1.
4. אם  $M_A$  אישרה, נאשר.
5. נבצע סימולציה של ריצת  $M_B$  על סרט 2, ונחזיר את תשובתה.

## נכונות

מקרה א'  $w \in A$   
בשלב 3  $M_A$  בהכרח מאשרת, ולכן  $M$  תאשר בשלב 4.

מקרה ב'  $w \notin A \wedge w \in B$   
כיוון ש  $M_A$  מכונה להכרעה, היא תדחה בשלב 3 ולכן נגיע לשלב 5. בשלב זה  $M_B$  תאשר וכך גם  $M$ .

מקרה ג'  $w \notin A \cup B$   
כיוון ש  $M_A, M_B$  מכונות להכרעה,  $M_A$  תדחה בשלב 3 וכך נגיע לשלב 5 שבו  $M_B$  תדחה וכך גם  $M$ .

## משפט

מח' השפות הניתנות לזיהוי סגורה תחת פעולת החיתוך.

## הוכחה

תהיינה  $A, B$  שפות ניתנות לזיהוי, עם מכונות  $M_A, M_B$  שמזהות אותן בהתאמה, (בה"כ שתיהן במודל  $B$ ). נראה שקיימת מ"ט  $M$  במודל  $MT_2$  המזהה את  $A \cap B$   $M(w)$ :

1. העתק את  $w$  מסרט 1 לסרט 2
2. הרץ את  $M_A$  על סרט 1.
3. אם  $M_A$  דחתה, דחה.
4. הרץ את  $M_B$  על סרט 2 והחזר את תשובתה.

## נכונות

$(w \in A \cap B)$  בשלב 2  $M_A$  תאשר ולכן נמשיך לשלב 4 וגם  $M_B$  תאשר וכך גם  $M$ .

$(w \notin A \cap B)$

מקרה א  $w \notin A$

$M_A$  לא תאשר בשלב 2. אם היא תדחה,  $M$  תדחה בשלב 3. אחרת  $M_A$  לא תעצור ו $M$  תשאיר בשלב 2 לנצח (ובפרט לא תאשר).

מקרה ב  $w \in A \wedge w \notin B$

$M_A$  תאשר ו $M$  תגיע לשלב 4. בשלב זה  $M_B$  תדחה וכך גם  $M$ , או שלא תעצור וכך גם  $M$ .

## שאלה

אם מ"ט  $M$  מזהה את  $L$ , האם היא מזהה גם כל  $L' \subseteq L$ ?