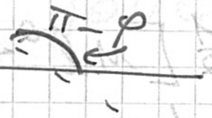
$$= \frac{1}{2} M \frac{l^2}{4} (1+8\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2$$



$$T_{\text{סיבוב}} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\pi-\varphi})^2 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2$$

$$T_{BC} = \frac{1}{2} M \frac{l^2}{4} (1+8\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2$$

$$T = T_{AB} + T_{BC} = \frac{ml^2}{3}(1+3\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2$$

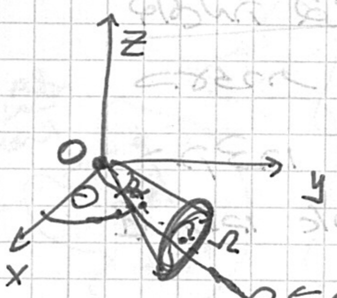
$$I_1 = \frac{1}{12} M l^2$$

לגרנז'יאן
$$L = \frac{ml^2}{3}(1+3\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2) - mgl\sin\varphi$$

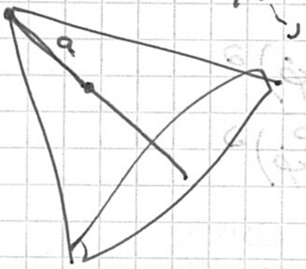
הרצאה 11

דוגמה 3

קונוס מתגלגל ללא החלקה על גבי משטח דו-מימדי כך שקדקוד אחד שלו מקובעת בראשית צירים כתוב את האנרגיה הקינטית של הקונוס.



מהירות זוויתית של גלגול. ← Ω



מהירות הנק' החשה שווה לאפס

במחוג a

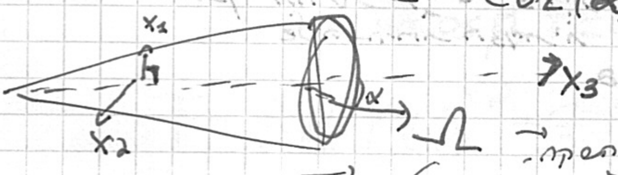
$$V - \Omega r = 0$$

$$V = a\sin\alpha\,\Omega$$

$$V = a\cos\alpha\,\dot{\theta}$$

$$a\sin\alpha\,\Omega = a\cos\alpha\,\dot{\theta}$$

$$\Omega = \cot(\alpha)\,\dot{\theta}$$



בגלל מקביל לציר החסקה

$$\vec{\Omega} = (-\Omega\sin\alpha, 0, \Omega\cos\alpha)$$

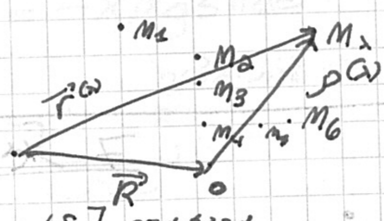
$$T = \frac{1}{2}M(a\cos(\alpha)\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I_1(-\Omega\sin\alpha)^2 + \frac{1}{2}I_3(\Omega\cos\alpha)^2$$

אנרגיה קינטית של מרכז מסה. אנרגיה קינטית סיבובית.

$$T = \frac{1}{2}Ma^2\cos^2\alpha\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\cos^2\alpha\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\dot{\theta}^2$$

תנע זוויתי בגוף קשיח:

$\vec{L}^{(\lambda)}$ תנע זוויתי של מסת m_λ בתוך גוף קשיח



[לא בהכרח מערכת אינרציאלית].

$$\vec{L} = \sum_\lambda \vec{L}^{(\lambda)} = \sum_\lambda m_\lambda \left(\vec{R} + \vec{\rho}^{(\lambda)}\right) \times \left[\dot{\vec{R}} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{\rho}^{(\lambda)}\right]\right]$$

$$= \sum_\lambda m_\lambda \left(\vec{R} \times \vec{V}\right) + \underbrace{\sum_\lambda m_\lambda \rho^{(\lambda)}}_{=0} \times \vec{V} + \underbrace{\sum_\lambda m_\lambda \vec{R} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}^{(\lambda)}\right)}_{= \vec{R} \times \left(\vec{\Omega} \times \sum_\lambda m_\lambda \vec{\rho}^{(\lambda)}\right) = 0}$$

מרכז המסה במערכת מרכז המסה.

$$+ \sum_\lambda m_\lambda \vec{\rho}^{(\lambda)} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}^{(\lambda)}\right)$$

$$= \vec{L}_{cm} + \sum_\lambda m_\lambda \vec{\rho}^{(\lambda)} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}^{(\lambda)}\right)$$

נזכיר ש:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \sum_\lambda m_\lambda \left[\rho^{2(\lambda)} \vec{\Omega} - \vec{\rho}^{(\lambda)} \left[\vec{\rho}^{(\lambda)} \cdot \vec{\Omega}\right]\right]$$

$$\rho^{2(\lambda)} = \sum_{l=1}^{3} \rho^{2(\lambda)}_{x_l}$$

$$\vec{\rho}^{(\lambda)} \cdot \vec{\Omega} = \sum_{j=1}^{3} \rho_{x_j}(\lambda) \Omega_{x_j}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{c.m.} + \sum_\lambda m_\lambda \left[\vec{\Omega} \sum_l \rho^2_{x_l}(\lambda) - \vec{\rho}^{(\lambda)} \sum_j \rho_{x_j}(\lambda) \Omega_{x_j}\right]$$

$$L_{x_k} = L_{c.m.\,x_k} + \sum_\lambda m_\lambda \left[\Omega_{x_k} \sum_l \rho^2_{x_l}(\lambda) - \rho^{(\lambda)}_{x_k} \sum_j \rho_{x_j}(\lambda) \Omega_{x_j}\right]$$

נעשה את הטריק הידוע

$$\Omega_{x_k} = \sum_j \Omega_{x_j} \delta_{jk}$$

$$L_{x_k} = L_{c.m.\,x_k} + \sum_\lambda m_\lambda \Big[\sum_j \Omega_{x_j} \delta_{jk} \sum_l \rho^2_{x_l}(\lambda)$$

$$- \rho_{x_k}(\lambda) \sum_j \rho_{x_j}(\lambda) \Omega_{x_j}\Big]$$

$$L_{x_k} = L_{c.m.\,x_k} + \sum_j \Omega_{x_j} \left(\sum_\lambda m_\lambda \delta_{jk} \left(\sum_l \rho^{2(\lambda)}_{x_l} - \rho^{(\lambda)}_{x_k} \rho^{(\lambda)}_{x_j}\right)\right]$$

טנזור מומנט אינרציה I_{jk}

$$L_{x_k} = L_{c.m.\,x_k} + \sum_j \Omega_{x_j} I_{jk}$$

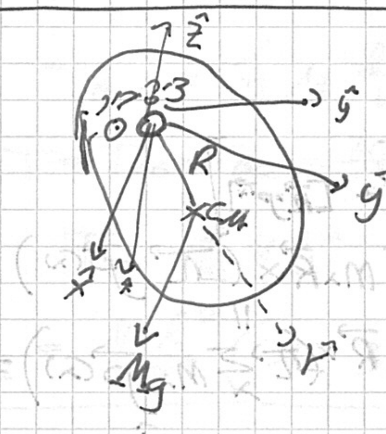
$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{cm} + I\vec{\Omega}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

במקרה שאין כחות חיצוניים $\vec{L} = const$

$$\vec{L}_{cm} = 0$$

$$I\vec{\Omega} = const$$



תרגיל 7

$$\dot{J}_z = \sum \vec{r}\vec{F}_\theta = -RMg\sin\theta$$

$$I\ddot{\theta} = -RMg\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{MR}{I} g\sin\theta$$

נקודה לשקולה $l > R$ תמיד למה?

התגובה: בציר כיוון $\hat{z}$ $Q_z = 0$

בכיוון $\hat{r}$: $-Mg\cos\theta = Q_r = -\vec{F} + \dot{p}r$

$+M(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - Mg\cos\theta - MR\dot{\theta}^2$

כיוון $\hat{\theta}$:

נזכר

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r}$$

כיוון $\hat{\theta}$ $Q_\theta = -F_\theta + M(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

$$-Mg\sin\theta + MR\ddot{\theta}$$

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - MgR\cos\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{I}\left[E + MgR\cos\theta\right]$$

$$Q_r = -Mg\left[1 + 2\frac{MR^2}{I}\right]\cos\theta - 2\frac{MR}{I}E$$

$$Q_\theta = -Mg\left[1 + \frac{MR^2}{I}\right]\sin\theta.$$

דוגמה: נתון מוט השח באורך L ומסה M שמחובר לציר סביב

במרחק X ממרכז המסה.

א) מהו זמן המחזור עבור זוויות קטנות.

ב) מצא את X כך שהמחזור יהיה מקסימלי