חשבון אינפי 2

פתרון לתרגיל 3

30 במרץ 2016

טענה 3.1 תהי $g(x) = 1 + x^2$ ונרצה למצוא את

$$\int \left[\frac{(2-g(x))\ln(g(x)) + g(x) + (g(x)-2)\ln(2-g(x))}{2g^2(x) - g(x)^3}\right] x \cdot \exp\left[\frac{g(x)-2}{g(x)}\right] dx = ?$$

פתרון:

הוכחה: לאורך הפתרון נעבוד מטעמי פשטות בכתיבה מפורשת של $1 + x^2$. יכולנו לתת כאן פתרון עם הצבה אוניברסאלית (טריגונומטרית) אבל דרך זו ארוכה יותר. נפשט את האינטגרל,

$$\int x \frac{(1+x^2) + (x^2-1)\ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{(1-x^4)(1+x^2)} \exp\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) dx.$$

ואם נעשה פישוט נוסף,

$$= \int x \frac{(1+x^2) + (x^2-1)\ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{(1-x^2)(1+x^2)^2} \exp\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) dx$$

נחלק את המונה ב$g(x)$ ונוציא מספר גורמים משותפים,

$$= \int \frac{x}{(1-x^2)(1+x^2)} \left(1 + \frac{x^2-1}{x^2+1}\ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right) \exp\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) dx$$

אבל מכאן כבר קל להציב באופן הבא,

$$t = \frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow dt = \frac{4x}{(1+x^2)^2} dx$$

וזאת בכדי שנוכל לקבל

$$\frac{1}{4}\int \frac{e^t}{t}\left(1 + t\ln(-t)\right) dt = \frac{1}{4}\int e^t \left(\frac{1}{t} + \ln(-t)\right) dt$$

אולם אינטגרל זה כבר אפשר לעשות בכלים של אינטגרציה בחלקים וכד'. ניתן גם פשוט להזכר כי

$$\frac{d}{dt} e^t f(t) = e^t \left[f(t) + f'(t)\right]$$

ואז נקבל בסופו של דבר כי

$$\boxed{\int \left[\frac{(2-g(x))\ln(g(x)) + g(x) + (g(x)-2)\ln(2-g(x))}{2g^2(x) - g(x)^3}\right] x \cdot \exp\left[\frac{g(x)-2}{g(x)}\right] dx = \frac{1}{4} e^t \ln(-t) = \frac{1}{4}\exp\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right] \cdot \ln\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right].}$$

■

תרגיל 3.2

מצאו פונקציה קדומה של

$$\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x + 2}$$

פתרון

נשים לב כי ניתן כאן ישירות להפעיל הצבה אוניברסאלית

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x + 2\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x + 2}dx &= \left[t = \tan\frac{x}{2}\right] \\
&= \int \frac{\frac{2-2t^2+2t}{1+t^2}}{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{6t}{(1+t^2)} + 2} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{\frac{4+4t-4t^2}{1+t^2}}{\frac{4t^2}{1+t^2} + 6t + 2 + 2t^2}dt \\
&= \int \frac{4+4t-4t^2}{4t^2+6t^3+6t+2+2t^2+2t^4+2t^2}dt \\
&= \int \frac{2+2t-2t^2}{t^4+3t^3+4t^2+3t+1}dt
\end{aligned}$$

אם נוקטים בדרך שהראנו בתרגול (כולל פירוק לשברים חלקיים במידת הצורך (תוך כדי כך שאתם שמים לב שהמכנה שלכם מתאפס ב$t=-1$) הפירוק לשברים חלקיים הוא

$$\frac{2+2t-2t^2}{t^4+3t^3+4t^2+3t+1} = \frac{4t}{t^2+t+1} + \frac{4}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2}$$

ומקבלים בתום ההליך,

$$\boxed{\int \frac{\sin x + 2\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x + 2}dx = \frac{2}{1+t} + \frac{4\arctan\left[\frac{1+2t}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}} + 4\log|1+t| - 2\log\left|1+t+t^2\right| + c}$$