תרגיל בית 5 - אנליזה למורים

9 בדצמבר 2016

שאלה 1

מצאו את בסכום הטור $\sum_{n=3}^{\infty}-\frac{7\cdot(-2)^{n+1}}{3}$.

הדרכה:

זכרו את הנוסחה לסכום טור הנדסי. עבור $|q|<1$ מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$ ואת הנוסחה לסכום סדרה הנדסית עבור $q\neq 1$ מתקיים כי $1+q+q^2+\cdots+q^{n+1}=\sum q^k=\frac{1-q^n}{1-q}$.

הערה:

שימו לב שטור מתחיל מאינדקס 3 ולא מ-0 כמו בנוסחה.

שאלה 2

חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

הדרכה:

נחשב את סדרת הסכומים החלקיים ונגלה כי זהו טור טלסקופי. (רמז: מצאו את המכנה המשותף, והשתמשו בחוקי הלוגים). לאחר צמצום אנו מגלים כי סדרת הסכומים הלקיים שווה ל: $S_n=\sum_{k=1}^{n}ln\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$ ולכן סכום הטור, הרי הוא גבול סדרת סכומים החלקיים, שווה ל-$?=lim\left(S_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

שאלה 3

חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+36n+323}$.

הדרכה:

ראשית, נפרק את הביטוי לשברים חלקיים: $\frac{1}{n+19}-\frac{1}{n+17}=\frac{2}{n^2+36n+323}$.

כעת נחשב את סדרת הסכומים החלקיים ונגלה כי זהוא טור טלסקופי, לאחר צמצום אנו מגלים כי סדרת הסכומים החלקיים שווה ל:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2+36k+323} = ?$, ולכן סכום הטור, הרי הוא גבול של סדרת הסכומים החלקיים, שווה ל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+36n+323} = lim_{n\to\infty}(S_n) = ?$$

שאלה 4

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) אם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum \frac{1}{b_n}$ מתבדר.

הדרכה:

כיוון שהטור $\sum b_n$ מתכנס אזי $lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ואז מה אפשר להגיד על $lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}$?

ב) יהי טור חיובי $\sum a_n$ אם הטור $\sum a_n^2$ מתכנס אזי הטור $\sum a_n$ מתכנס.

רמז:

התבוננו בטור $\sum \frac{1}{n}$.

שאלה 5

קבע האם הטורים הבאים מתכנסים:

א) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$

ג) $\sum \frac{n+2}{n(n+1)}$

ד) $\sum \frac{1}{n^2+1}$

ה) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$