פתרון תרגיל בית 6, שניוניות, זהבית צבי

סווגו את השניוניות הבאות במרחב התלת ממדי:

1. $-2x^2-y^2-2z^2+xz=-4$

פתרון

המטריצה של התבנית הנתונה: $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & -1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -2\end{pmatrix}$.

זו מטריצה סימטרית, כאשר על האלכסון המקדמים של x^2, y^2, z^2, בשורה הראשונה מימין המקדמים של xy, xz, בשורה השניה yx, yz ובשורה השלישית zx, zy.

התבנית היא:

$$(x \quad y \quad z)\underbrace{\begin{pmatrix}-2 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & -1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=-4$$

A סימטרית ולכן ניתנת ללכסון אורתוגונלי:

נמצא ערכים עצמים:

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס $|A-\lambda I|=0$:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & -1-\lambda & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)\underbrace{(-1)^{2+2}}_{1}\begin{vmatrix}-2-\lambda & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-1-\lambda)\left[(-2-\lambda)^2-\frac{1}{4}\right]=(-1-\lambda)\left[(2+\lambda)^2-\frac{1}{4}\right]=0$$

$$\lambda_1=-1, (2+\lambda)-\tfrac{1}{4}=0 \Rightarrow (2+\lambda)=\tfrac{1}{4} \Rightarrow 2+\lambda=\pm\tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=-1, \lambda_2=-\frac{5}{2}, \lambda_3=-\frac{3}{2}$$

קיבלנו ע״ע שונים, לכן הו״ע שיתקבלו י״היו אורתוגונלים ואין צורך לבצע תהליך גרם שמידט.
נמצא ו״ע באמצעות פתרון המערכת $\left(A-\lambda I\right)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1=-1$:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$\begin{cases}-a+\frac{1}{2}b=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}c\\ \frac{1}{2}a-c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}c\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}c-c=0\Rightarrow-\frac{3}{4}c=0\Rightarrow c=0\end{cases}\Rightarrow a=0,c=0$$

$b\neq 0$ חופשי. נבחר $b=1$ ונקבל ווקטור עצמי: $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

וקטור זה כבר מנורמל: $\left\|\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=1$ ולכן: $\vec{u_1}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=-\frac{5}{2}$:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{3}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{2}{3}R_2\to R_2]{R_3-R_1\to R_3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{3}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c=0\Rightarrow a=-c\\ \frac{3}{2}b=0\Rightarrow b=0\end{cases}$$

$c\neq 0$ חופשי.

נבחר $c=-1$ ואז $a=1$ ולכן וקטור עצמי: $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

ננרמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ ולכן: $\vec{u_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_3=-\frac{3}{2}$:

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c=0\Rightarrow a=c\\ \frac{1}{2}b=0\Rightarrow b=0\end{cases}$$

$c\neq 0$ חופשי.

נבחר $c=1$ ואז $a=1$ ולכן וקטור עצמי: $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

ננרמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$ ולכן: $\vec{u_3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

קיבלנו מטריצה אורתוגונלית P והאלכסונית הדומה D:

$$D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-\frac{5}{2}&0\\0&0&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

נציב:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'&y'&z'\end{pmatrix}P^t$$

נציב בתבנית הריבועית:

$$\begin{pmatrix}x'&y'&z'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-\frac{5}{2}&0\\0&0&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}}_{D=P^tAP}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=-4$$

לכן:

$$-x'^2-\frac{5}{2}y'^2-\frac{3}{2}z'^2=-4\Big|:(-4)$$

$$\frac{x'^2}{2^2}+\frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{8}{5}}\right)^2}+\frac{z'^2}{\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2}=1$$

קיבלנו אליפסואיד.

בכדי לקבוע האם זה סיבוב או שיקוף, נשתמש במשפט אוילר.

נחשב את $|P|$:

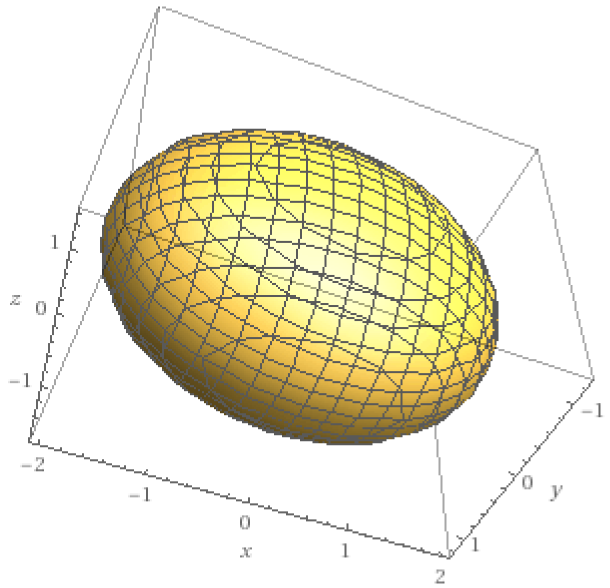
$$|P|=\begin{vmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}$$

נפתח לפי שורה שניה ונקבל:

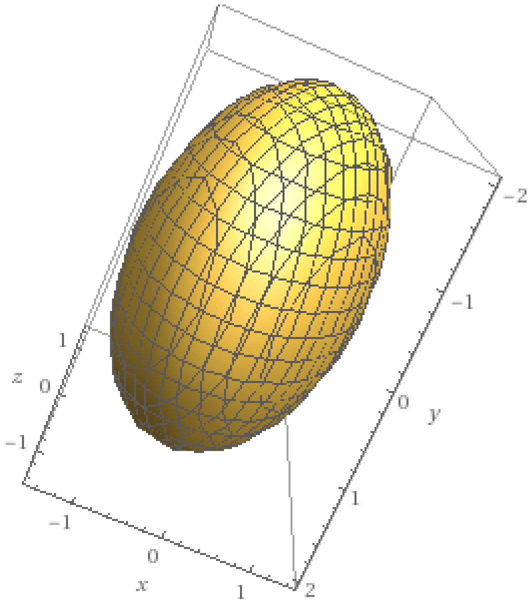
$$|P| = \underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = -1$$

לכן מדובר בשיקוף.
קיבלנו אליפסואיד משוקף.

איור לפי הצירים x', y', z':



הצורה המקורית לפי x, y, z:



2. $y^2 - 4xz - \sqrt{2}(x+z) - 2y - 1 = 0$

<u>פתרון</u>

המטריצה של התבנית הנתונה: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

זו מטריצה סימטרית, כאשר על האלכסון המקדמים של x^2, y^2, z^2, בשורה הראשונה מימין המקדמים של xy, xz, בשורה השנייה yx, yz ובשורה השלישית zx, zy.

התבנית היא:

$$(*) \quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

A סימטרית ולכן ניתנת ללכסון אורתוגונלי:

נמצא ערכים עצמים:

נמצא את הפולינום האופייני ונשווה לאפס $|A-\lambda I| = 0$:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-4)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$$

קיבלנו ע"ע שונים, לכן הו"ע שיתקבלו יהיו אורתוגונלים ואין צורך לבצע תהליך גרם שמידט.

נמצא ו"ע באמצעות פתרון המערכת $(A-\lambda I)v = 0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$\begin{cases} -a - 2c = 0 \Rightarrow a = -2c \\ -2a - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ 4c - c = 0 \Rightarrow 3c = 0 \Rightarrow c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = c = 0$$

$b \neq 0$ חופשי. נבחר $b = 1$ ונקבל ווקטור עצמי: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

נשים לב כי $\vec{v}_1$ כבר מנורמל.

עבור $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$\begin{cases} -2a - 2c = 0 \Rightarrow a = -c \\ -b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

$c \neq 0$ חופשי.

נבחר $c = -1$ ואז $a = 1$ ולכן וקטור עצמי: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ננרמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ ולכן: $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_3 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$\begin{cases} 2a - 2c = 0 \Rightarrow x = z \\ 3b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

$c \neq 0$ חופשי.

נבחר $c = 1$ ואז $a = 1$ ונקבל ווקטור עצמי: $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ננרמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ולכן: $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

קיבלנו מטריצה אורתוגונלית P והאלכסונית הדומה D:

$$P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

ולכן: $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

נציב:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}P^t$$

נציב בתבנית הריבועית ונקבל:

$$\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}}_{D=P^tAP}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}-\underbrace{\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=1$$

לכן:

$$x'^2+2y'^2-2z'^2-2x'-2z'=1$$

נעשה השלמה לריבוע:

$$(x'^2-2x'+1)-1+2y'^2-2\left(\left(z'^2+2z'\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\right)=1$$

$$(x'-1)^2-1+2y'^2-2\left(z'+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=1$$

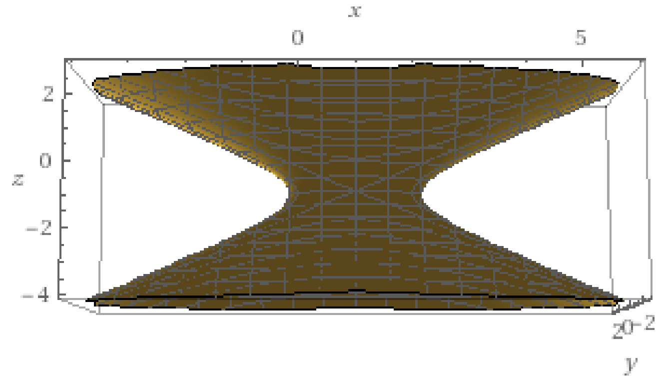
$$(x'-1)^2+2y'^2-2\left(z'+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

$$\frac{(x'-1)^2}{\frac{3}{2}}+\frac{y'^2}{\frac{3}{4}}-\frac{\left(z'+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}=1$$

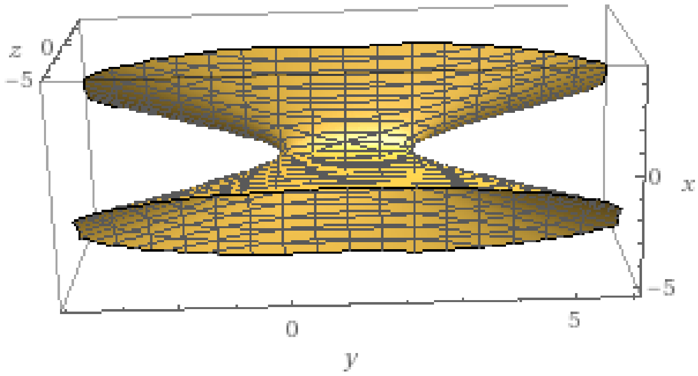
קיבלנו היפרבולואיד חד יריעתי מוזז.
בכדי לקבוע האם זה סיבוב או שיקוף, נשתמש במשפט אוילר.
נחשב את $|P|$:

$$|P|=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=-1$$

לכן זה היפרבולואיד חד יריעתי מוזז ומשוקף.
איור לפי הצירים x',y',z' :



הצורה המקורית לפי x,y,z :



3. $y^2-2xz-\sqrt{2}(x+z)-1=0$

פתרון

המטריצה של התבנית הנתונה: $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

זו מטריצה סימטרית, כאשר על האלכסון המקדמים של x^2,y^2,z^2 , בשורה הראשונה מימין המקדמים של xy,xz , בשורה השניה yx,yz ובשורה השלישית zx,zy .

התבנית היא:

$$(*)\quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

A סימטרית ולכן ניתנת ללכסון אורתוגונלי:

נמצא ערכים עצמים:

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס $|A-\lambda I|=0$:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1)=0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

נמצא ו"ע באמצעות פתרון המערכת $(A-\lambda I)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

עבור $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$-a-c=0 \Rightarrow a=-c$$

ב b,z חופשים.

נבחר $b=0, c=-1$ ונקבל ווקטור עצמי: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

נבחר $b=1, c=-1$ ונקבל עוד ו"ע בת"ל: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

הו"ע שקיבלנו אינם אורתוגונלים כיון ש-

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \neq 0$$

נבצע תהליך גראם-שמידט על שני הוקטורים העצמים שקיבלנו עבור הע"ע עם ריבוי אלגברי 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\|\vec{w}_1\|^2}\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- שימו לב שאם נבחר $y=1, z=0$ נקבל $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

ועבור $y=0, z=1$ נקבל $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ וקיבלנו וקטורים אורתוגונלים, זה קרה בגלל שקיבלנו ש x תלוי רק במשתנה אחד (z), אם הוא הייה תלוי גם ב z וגם ב y לא הינו יכולים לבחור ערכים של z ו y כך שהוקטורים יתקבלו אורתוגונלים מלכתחילה.
אין צורך לעשות גרם שמידט רק לנרמל את הווקטור השני בבחירה זו.

נמשיך עם הוקטורים ממקודם.

ננרמל את הוקטורים:

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$ ולכן: $$\vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

הווקטור $\vec{w}_2$ כבר מנורמל.

עבור $\lambda_3=-1$:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$\begin{cases}a-c=0\Rightarrow a=c\\2b=0\Rightarrow b=0\end{cases}$$

$c\neq 0$ חופשי.

נבחר $c=1$ ואז $a=1$ ולכן וקטור עצמי: $\vec{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

ננרמל אותו: $\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$ ולכן: $\vec{u}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

קיבלנו מטריצה אורתוגונלית P והאלכסונית הדומה D :

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

נציב :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'&y'&z'\end{pmatrix}P^t$$

נציב בתבנית הריבועית ונקבל:

$$\begin{pmatrix}x'&y'&z'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{D=P^tAP}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}-\underbrace{\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0&0&2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$$

לכן :

$$x'^2+y'^2-z'^2-2z'=1$$

נעשה השלמה לריבוע:

$$x'^2+y'^2-\left(\left(z'^2+2z'+1\right)-1\right)=1$$

$$x'^2+y'^2-(z'+1)^2+1=1$$

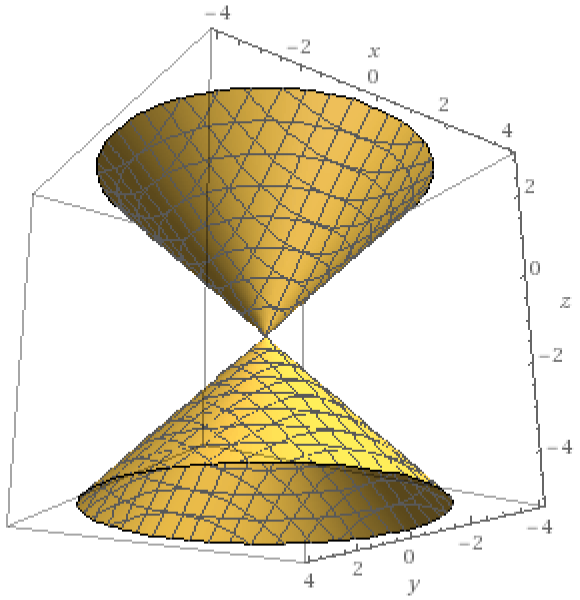
$$x'^2+y'^2-(z'+1)^2=0$$

$$(z'+1)^2=x'^2+y'^2$$

קיבלנו חרוט מעגלי מוזז.
בכדי לקבוע האם זה סיבוב או שיקוף, נשתמש במשפט אוילר.
נחשב את $|P|$:

$$|P|=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\underbrace{(-1)^{2+2}}_{1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=1$$

לכן קיבלנו חרוט מעגלי מוזז ומסובב.
איור לפי הצירים x', y', z' :



הצורה המקורית לפי x, y, z :