אינפי 1 החממה תרגול 8 תשפ"א

21 בדצמבר 2020

1 התכנסות טורים כלליים

הגדרה: יהי $\sum a_n$ טור. נאמר שהטור מתכנס בהחלט אם $\sum |a_n|$ מתכנס. נאמר ש־ $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס ולא מתכנס בהחלט.
משפטים:

- טור שמתכנס בהחלט מתכנס.
- לייבניץ: אם $a_n \searrow 0$ אז $\sum(-1)^n a_n$ מתכנס.
- דיריכלה: אם $a_n \searrow 0$ ו־$\sum b_n$ חסום (כלומר, סדרת הסכומים החלקיים חסומה), אז $\sum a_n b_n$ מתכנס.
- אבל: תהי a_n מונוטונית וחסומה, $\sum b_n$ מתכנס, אז: $\sum a_n b_n$ מתכנס.

תרגילים:

1. בדקו התכנסות בהחלט/בתנאי/ התבדרות של הטורים הבאים:

(א) $\sum(-1)^{n+1}\frac{n^{10}}{(n+2)!}$
פתרון: נבדוק התכנסות בהחלט: נבדוק את הטור $\sum\frac{n^{10}}{(n+2)!}$, נבדוק את מבחן המנה (כי יש עצרת):

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{\frac{(n+1)^{10}}{(n+3)!}}{\frac{n^{10}}{(n+2)!}}=\lim\frac{(n+1)^{10}(n+2)!}{n^{10}(n+3)!}=\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}\cdot\frac{1}{n+3}=0<1$$

ולכן הטור מתכנס לפי מבחן המנה. קיבלנו שהטור שלנו מתכנס בהחלט (ולכן מתכנס).

(ב) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$
פתרון: בהרצאה ראיתם שהטור $\sum\frac{1}{n\log n}$ מתבדר, ולכן הטור לא מתכנס בהחלט. נבדוק התכנסות בתנאי: $\frac{1}{n\log n}\searrow 0$ (כי $n+1>n$ וכן $\log(n+1)>$

$\log(n)$ וביחד $n\log n > (n+1)\log(n+1)$, ולכן $\frac{1}{n\log n} < \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$ לכן מונו' יורדת. שאיפה לאפס נובעת מכך ש־ $n\log n$ עולה לאינסוף), ולכן לפי לייבניץ הטור מתכנס. בסה"כ הטור שלנו מתכנס בתנאי.

(ג) נגדיר את הסדרה

$$a_n = 1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{8}$$

כלומר,

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & n \equiv 1(\mod 3) \\ -\frac{1}{n+1} & n \not\equiv 1(\mod 3) \end{cases}$$

והשאלה היא על הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

פתרון: נבדוק התכנסות בהחלט: קל לראות שהחלט של טור זה גדול מהטור ההרמוני: $\forall n : |a_n| > \frac{1}{n+1}$, ולכן ההחלט מתבדר. ולכן הטור שלנו לא מתכנס בהחלט.

הערה לפני בדיקת התכנסות בתנאי: לא ניתן לשים סוגריים במקום ספציפי כי זהו לא טור חיובי. בטור חיובי אכן לא משנה סדר הסכימה.

התכנסות בתנאי: לייבניץ לא יעזור כאן, אבל ננסה דיריכלה: $c_n = \frac{1}{n+1} \searrow 0, b_n = 2, -1, -1, 2, -1, -1, \ldots$ ואז $\sum b_n = 2, 1, 0, 2, 1, 0, \ldots$ ולכן $\sum b_n$ חסום, ולפי דיריכלה $\sum c_n b_n = \sum a_n$ מתכנס. בסה"כ: מתכנס בתנאי.

(ד) $\sum \frac{(-1)^n}{n^s}$ עבור $s \in \mathbb{R}$.

פתרון: עבור $s > 1$ מתכנס בהחלט, לפי ההרצאה. לכל $s \leq 1$ לא מתכנס בהחלט. נבדוק התכנסות בתנאי:

עבור $s = 1$ ראיתם בהרצאה התכנסות בתנאי. עבור $0 < s \leq 1$: הסדרה $\frac{1}{n^s} \searrow 0$ ולכן לפי לייבניץ $\sum \frac{(-1)^n}{n^s}$ מתכנס בתנאי.

עבור $s \leq 0$ מתבדר, כי $\frac{(-1)^n}{n^s} \not\to 0$ (עבור $s = 0$ נקבל שני גבולות חלקיים ± 1, עבור $s < 0$ אז $\frac{1}{n^s}$ מונו' עולה ולא חסומה, ולכן שני גבולות חלקיים $\pm\infty$).

(ה) $\sum \frac{(-1)^n}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

פתרון: נבדוק התכנסות בהחלט: מתקיים: $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n} > \frac{1}{n}$, ולכן מתבדר לפי מבחן ההשוואה. לכן הטור שלנו לא מתכנס בהחלט.

נבדוק התכנסות בתנאי: לפי לייבניץ, כיון ש־ $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n} \searrow 0$. ברור ששואפת לאפס, לגבי מונו':

$$\frac{\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{n+1}}{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{n}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\underbrace{\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}}_{<1}\right)^{n+1} < 1$$

ולכן, לפי לייבניץ הטור שלנו מתכנס, ובסה"כ מתכנס בתנאי.

ו) $\sum \frac{(-1)^n \cdot 5n}{(n+1)\log n}$.

פתרון: לגבי התכנסות בהחלט: לפי השוואה:

$$\frac{5n}{(n+1)\log n} > \frac{5\log n}{(n+1)\log n} \geq \frac{5}{n+1}$$

ולכן

$$\sum \frac{5n}{(n+1)\log n} > \sum \frac{5}{n+1} \to \infty$$

ולכן אין התכנסות בהחלט.

בתנאי: כנראה ניתן לפתור ע"י לייבניץ, אני חושב שאבל פה יותר פשוט: הטור $-\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\log n} = \sum \frac{(-1)^n}{\log n}$ מתכנס לפי לייבניץ, והסדרה $\frac{5n}{n+1}$ מונו' עולה:

$$\frac{\frac{5(n+1)}{n+2}}{\frac{5n}{n+1}} = \frac{5(n+1)^2}{5n(n+2)} > 1$$

וחסומה ע"י 5 (כי לשם מתכנסת, לכן לא יכולה לעבור את 5). בסה"כ הטור מתכנס לפי אבל, ולכן מתכנס בתנאי.

2. ראיתם משפט: $\sum a_n$ מתכנס אמ"ם: $\forall\epsilon > 0, \exists N_0, \forall n > N_0, p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \epsilon$. יהי $\sum a_n$ טור חיובי מתבדר. הוכיחו: $\sum \frac{a_n}{S_n}$ מתבדר.

פתרון: נבחן את התנאי על הטור החדש:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k}\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

כעת, כיון ש־ $\sum a_n$ מתבדר, אז לפי קושי יש $\epsilon > 0$ לכל N_0 יש $n > N_0$ ויש p כך שמתקיים מתקיים $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k > \epsilon$, ולכן נוכל להמשיך:

$$\frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k > \frac{1}{S_{n+p}} \cdot \epsilon$$

נשים לב שכעת n, p ספציפיים ולכן נוכל לבחור את $\frac{1}{S_{n+p}} \cdot \epsilon$ כ־ ϵ' שישלול לנו את קושי, ולכן הטור שבדקנו מתבדר גם.