4. יהיו $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$, $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0$

פולינומים כך ש- $m,n>0$.

צ"ל: $Res(f,g)=0 \iff a_n=0=b_n$ או של $f(x)$ ו-$g(x)$ יש

גורם משותף (פולינום ממעלה חיובית המחלק את שניהם).

$\Rightarrow$

• אם $a_n=0=b_n$ אזי ל- $Res(f,g)$ יש עמודת אפסים (העמודה הראשונה) ואז לפי משפט הדטרמיננטה שווה לאפס, כלומר $Res(f,g)=0$.

- אם ל- $f(x)$ ול- $g(x)$ יש גורם משותף $\Leftarrow$ ל- $f(x)$ ול- $g(x)$ קיים אותו שורש (השורש של הפולינום המחלק את שניהם). נסמן שורש זה ב-t.

נתבונן בוקטור $\vec{t}=\begin{pmatrix}t^{m+n}\\ \vdots \\ t\end{pmatrix}$. נכפול את הדטרמיננטה בוקטור זה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & & & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ & & 0 & a_n & & & & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & & & & & & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & b_0 & & \vdots \\ 0 & & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & & b_0 \end{pmatrix}}_{\text{נסמן את הדטרמיננטה ב-A}} \begin{pmatrix} t^{m+n} \\ t^{m+n-1} \\ \vdots \\ t^2 \\ t \end{pmatrix} = (*)$$

נכפול ונקבל:

שורה 1
$$a_nt^{m+n}+a_{n-1}t^{m+n-1}+\dots+a_0t^m =$$
t שורש של הפולינום f(x)
$$=t^m(a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\dots+a_0)=t^m\cdot f(t)=t^m\cdot 0=0$$

שורה 2
$$a_nt^{m+n-1}+a_{n-1}t^{m+n-2}+\dots+a_0t^{m-1}=$$
$$=t^{m-1}(a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\dots+a_0)=t^{m-1}\cdot 0=0$$

$\vdots$

שורה m+1
$$b_mt^{m+n}+b_{m-1}t^{m+n-1}+\dots+b_0t^n=$$
t שורש של הפולינום g(x)
$$=t^n(b_mt^m+b_{m-1}t^{m-1}+\dots+b_0)=t^n\cdot g(t)=t^n\cdot 0=0$$

$\vdots$

כלומר ניתן לראות שהמכפלה (*) יוצאת $\vec{0}$ $\Leftarrow$ $A\vec{t}=\vec{0}$

אם $t=0$ אזי $0=f(t)=a_n\cdot 0+\dots+a_1\cdot 0+a_0=a_0$

$0=g(t)=b_m\cdot 0+\dots+b_1\cdot 0+b_0=b_0$

כלומר $a_0=b_0=0$ ולכן לדטרמיננטה יש עמודת אפסים (עמודה

אחרונה) ולכן הדטרמיננטה שווה ל-0, כלומר $Res(f,g)=0$.

אם $t\neq 0$ ⇐ $\vec{t}=\begin{pmatrix} t^{m+n} \\ \vdots \\ t \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇐ למערכת $A\vec{x}=0$ יש פתרון

לא טריוויאלי ($\vec{t}$ פתרון כזה) ⇐ המטריצה A לא הפיכה ⇐

$\det A=Res(f,g)=0$ (סוף משפט).

$\Leftarrow$

נניח כי $Res(f,g)=0$. נכפיל כל אחת מעמודות הדטרמיננטה בסקלרים הבאים: עמודה ראשונה $\to x^{m+n-1}$, x^{m+n-2}, $\ldots$, $1 \leftarrow$ עמודה אחרונה

(כלומר $x^{m+n-1}C_1, \ldots, 1C_{n+m}$). מותר להכפיל בסקלרים משום שהדטרמיננטה היא אפס (כלומר אין צורך לחלק את התוצאה בהם כי ממילא זה 0). כעת נקבל:

$$\begin{pmatrix} a_n x^{m+n-1} & a_{n-1}x^{m+n-2} & \cdots & a_0 x^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n x^{m+n-2} & \cdots & \cdots & a_0 x^{m-1} & 0 \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

נחבר את כל העמודות לעמודה הראשונה, כלומר $\sum_{i=2}^{n+m} C_i + C_1 \to C_1$.

מותר לעשות זאת משום שזו פעולת עמודה אלמנטרית שאינה משנה את ערך הדטרמיננטה. כעת נקבל בעמודה הראשונה:

$$a_n x^{m+n-1}+a_{n-1}x^{m+n-2}+\ldots+a_0x^m=x^{m-1}(a_nx^n+\ldots+a_0)=x^{m-1}f(x)$$

$$a_nx^{m+n-2}+\ldots+a_0x^{m-1}=x^{m-2}f(x)$$

$$\vdots$$

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=f(x)$$

$$b_mx^{m+n-1}+\ldots+b_0x^n=x^{n-1}g(x)$$

$$\vdots$$

$$b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0=g(x)$$

מכיוון ש- $Res(f,g)=0$ אז המטריצה אינה הפיכה ⇐ השורות של המטריצה תלויות לינארית ⇐ קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי של השורות שנותן אפס. נסמן צירוף כזה ב- $\alpha_{m-1},\ldots,\alpha_0,\beta_{n-1}\ldots\beta_0$ –

הצירוף הזה של השורות (עבור כל אינדקס שהוא) נותן אפס, ובפרט

מגישה:

עבור העמודה הראשונה, כלומר:

$$\alpha_{m-1}x^{m-1}f(x)+\dots+\alpha_0 f(x)+\beta_{n-1}x^{n-1}g(x)+\dots+\beta_0 g(x)=0$$

$$(\alpha_{m-1}x^{m-1}+\dots+\alpha_0)f(x)+(\beta_{n-1}x^{n-1}+\dots+\beta_0)g(x)=0$$

$$(\alpha_{m-1}x^{m-1}+\dots+\alpha_0)f(x)=-(\beta_{n-1}x^{n-1}+\dots+\beta_0)g(x)=0$$

אם $a_n=b_m=0$ אז סיימנו (הוכחנו $\Leftarrow$).

אם $a_n\neq 0$ אז נקבל: [בשני האגפים יש את אותם שורשים לפולינומים]

$$(\alpha_{m-1}x^{m-1}+\dots+\alpha_0)f(x)=-(\beta_{n-1}x^{n-1}+\dots+\beta_0)g(x)$$

פולינום ממעלה n ולכן יש לו n שורשים (לא בהכרח שונים)

פולינום ממעלה $n-1$, כלומר יש לו $n-1$ שורשים

פולינום ממעלה m [illegible]

$\Downarrow$

נובע שלכל $f(x)$ ו-$g(x)$ חייב להיות לפחות שורש משותף אחד. השורשים באגף ימין הם בדיוק השורשים באגף שמאל. לכן, השורשים של $f(x)$ שבאגף ימין צריכים להימצא באחד משני הפולינומים: $g(x)$ או $(\beta_{n-1}x^{n-1}+\dots+\beta_0)$.
(כלומר שהשורשים בשני האגפים יהיו זהים)

אבל ל-$(\beta_{n-1}x^{n-1}+\dots+\beta_0)$ יש רק $n-1$ שורשים. כלומר, השורש האחרון חייב להיות שורש של $g(x)$ $\Leftarrow$ ל-$f(x)$ ול-$g(x)$ יש שורש משותף

$\Leftarrow$ יש פולינום ממעלה חיובית שמחלק את $f(x)$ ו-$g(x)$ [אם נסמן את השורש המשותף ב-t, אז הפולינום הזה יהיה $h(x)=x-t$].

אם $b_m\neq 0$ אז שוב נקבל של-$g(x)$ m שורשים ומכיוון שלפולינום $(\alpha_{m-1}x^{m-1}+\dots+\alpha_0)$ יש $m-1$ שורשים אז שורש נוסף חייב להימצא ב-$f(x)$ $\Leftarrow$ ל-$g(x)$ ול-$f(x)$ יש פתרון משותף $\Leftarrow$ קיים פולינום ממעלה חיובית המחלק את שניהם. מ.ש.ל.